

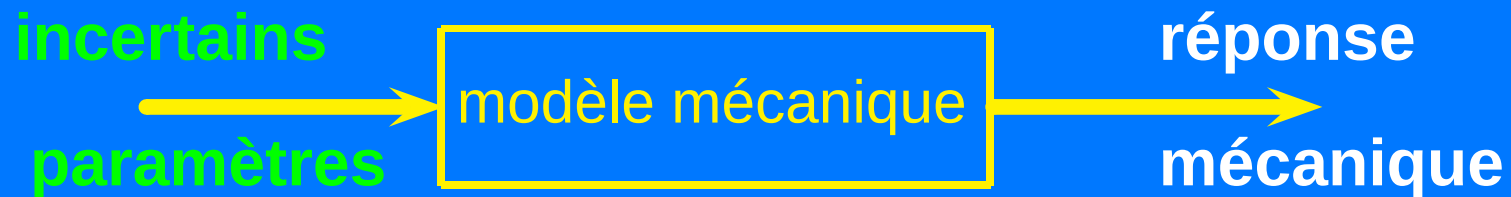
Réunion FIMA, 8 novembre 2012

Méthodes probabilistes de propagation d'incertitudes - application au génie civil

Julien Baroth, Laboratoire Sols, Solides, Structures - Risques (3SR)

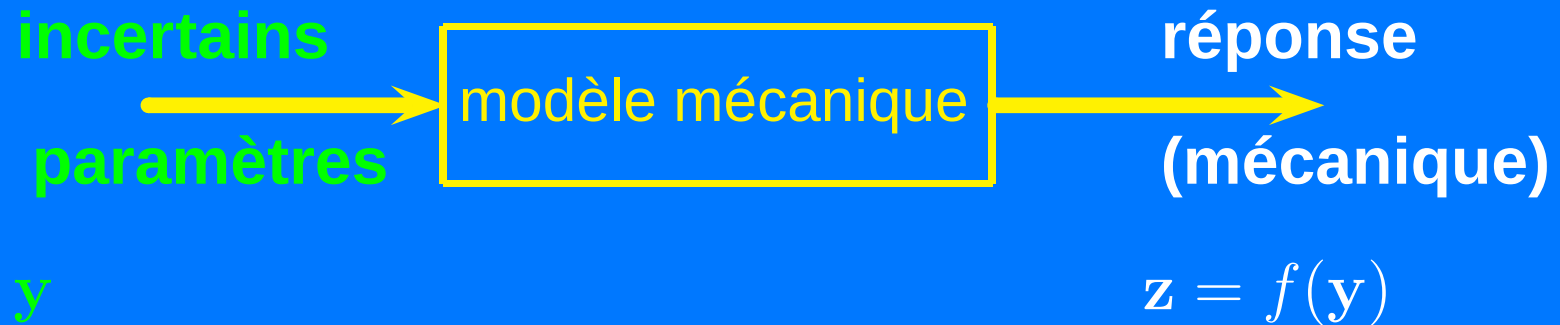
Université Joseph Fourier / Grenoble INP / UMR 5521

Propagation d'incertitudes



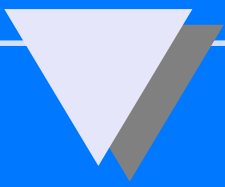
- fonction analytique
- modèle numérique (éléments finis/discrets)
- non linéarités mécaniques et matérielles ?
- nombreux paramètres ?

Introduction



- matériaux
- géométrie
- chargement...

- déplacement
- effort
- contraintes...



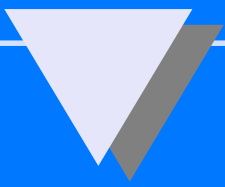
Introduction

- Paramètres incertains $\leftarrow$ variables aléatoires (v.a.): Y , Z



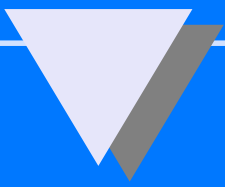
Introduction

- Paramètres incertains $\leftarrow$ variables aléatoires (v.a.): Y , Z
- v.a. entrée/sortie caractérisées par
 - moyennes μ_Y, μ_Z
 - matrice de covariance C_Y, C_Z
 - fonction de densité de probabilité p_Y, p_Z



Introduction

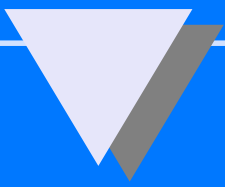
- Paramètres incertains $\leftarrow$ variables aléatoires (v.a.): $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$
- v.a. entrée/sortie caractérisées par
 - moyennes $\mu_{\mathbf{Y}}, \mu_{\mathbf{Z}}$
 - matrice de covariance $C_{\mathbf{Y}}, C_{\mathbf{Z}}$
 - fonction de densité de probabilité $p_{\mathbf{Y}}, p_{\mathbf{Z}}$
- Approximations recherchées :
 - moyennes $\tilde{\mu}_{\mathbf{Z}}$
 - matrice de covariance $\tilde{C}_{\mathbf{Z}}$
 - fonction de densité de probabilité $\tilde{p}_{\mathbf{Z}}$
 - ...



Introduction

- simulation de Monte-Carlo

Robuste mais coûteuse



Introduction

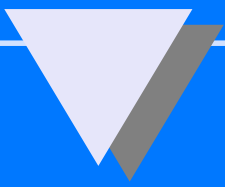
- simulation de Monte-Carlo

Robuste mais coûteuse

- Alternatives

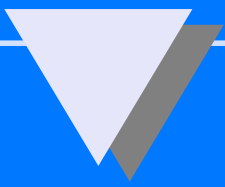
Stochastic finite element methods (SFEM)

- développés depuis 30 ans
- besoins :
 - + nombreuses variables aléatoires
 - + non linéarités mécaniques et matérielles



Besoin

**Disposer de méthodes probabilistes
applicables à des modèles non linéaires
et à des codes de calcul différents**



Plan de la présentation

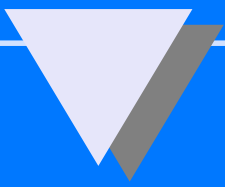
Introduction

1. Les MEFS, quelques éléments

2. Étude d'une MEFS Spectrale

3. Approches non intrusives

Conclusion



Plan de la présentation

Introduction

1. Les MEFS, quelques éléments

1.1. Principes communs

1.2. Classifications possibles

2. Étude d'une MEFS Spectrale

3. Approches non intrusives

Conclusion

Modélisation déterministe



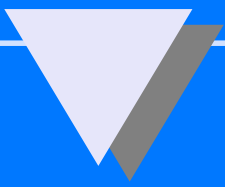
Modélisation probabiliste



Deux choix

$\mathbf{Y}$ variable ou champ aléatoire
loi $\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}$

$\mathbf{Z}$ variable ou champ aléatoire
loi $\mathbb{P}_{\mathbf{Z}}$ (inconnue)
 $\mu_{\mathbf{Z}}(x), C_{\mathbf{Z}}(x, x')$



Des méthodes différentes, délicates à classer

- MEFS modifiant ou non le modèle EF d'étude
(« intrusive » ou « non intrusive »)
- MEFS prenant en compte ou non des champs aléatoires
- Représentations des champs aléatoires indépendantes ou non de la discrétisation EF



Des méthodes différentes, délicates à classer

- MEFS modifiant ou non le modèle EF d'étude
(« intrusive » ou « non intrusive »)
- MEFS prenant en compte ou non des champs aléatoires
- Représentations des champs aléatoires indépendantes ou non de la discrétisation EF

+ *MEFS* modifiant ou non le modèle *EF*

Modèle Eléments Finis initial

conservé

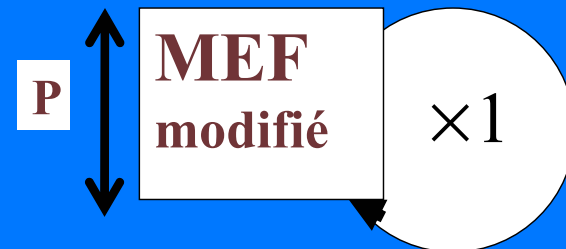
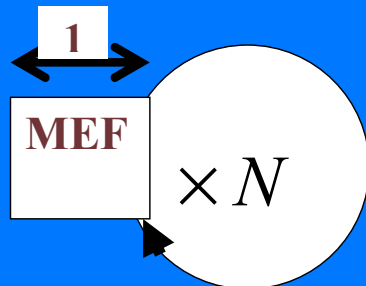
MEF en « boîte noire »

modifié

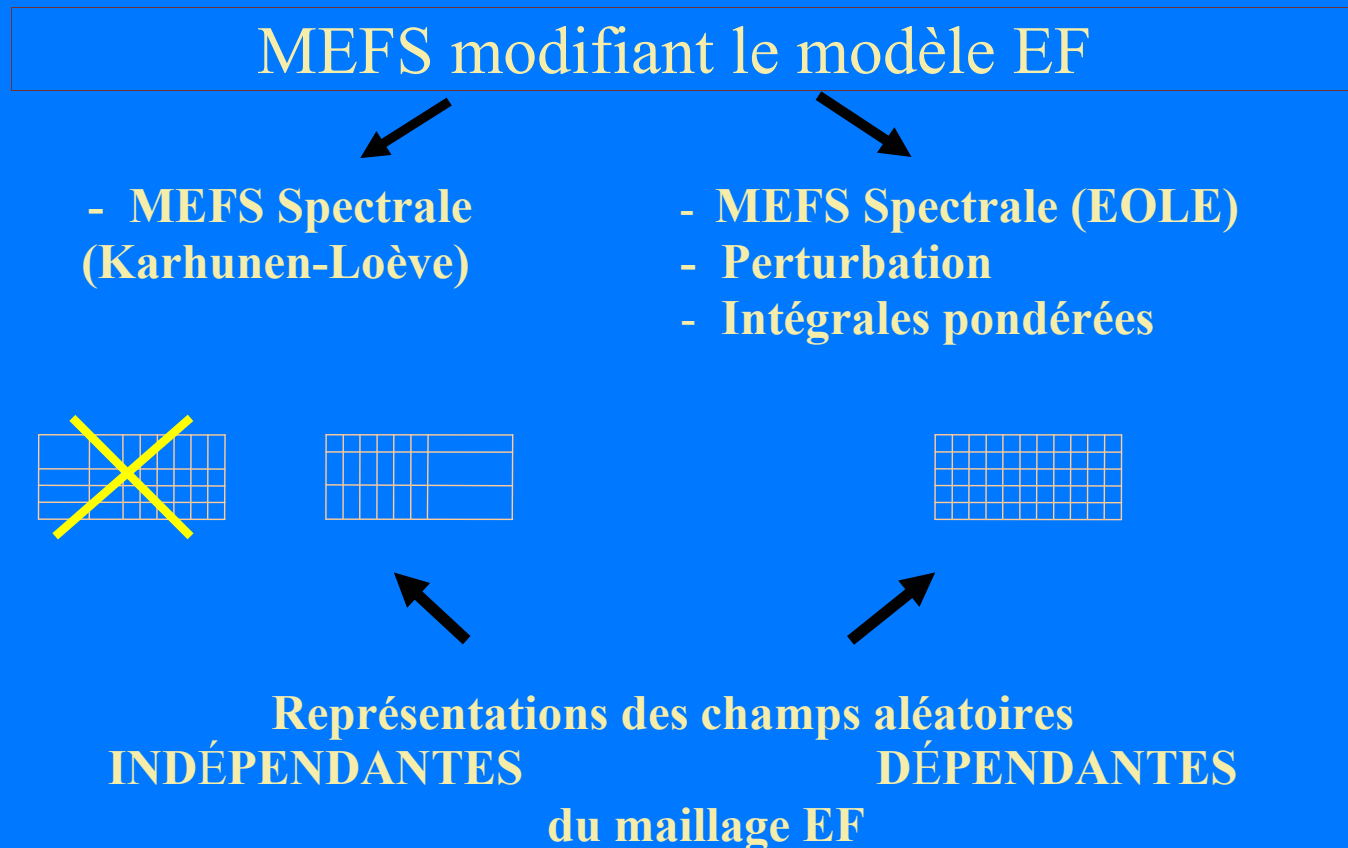
$P = 1$
 $N \gg 1$

P : COÛT D'UN APPEL
 N : NOMBRE D'APPELS

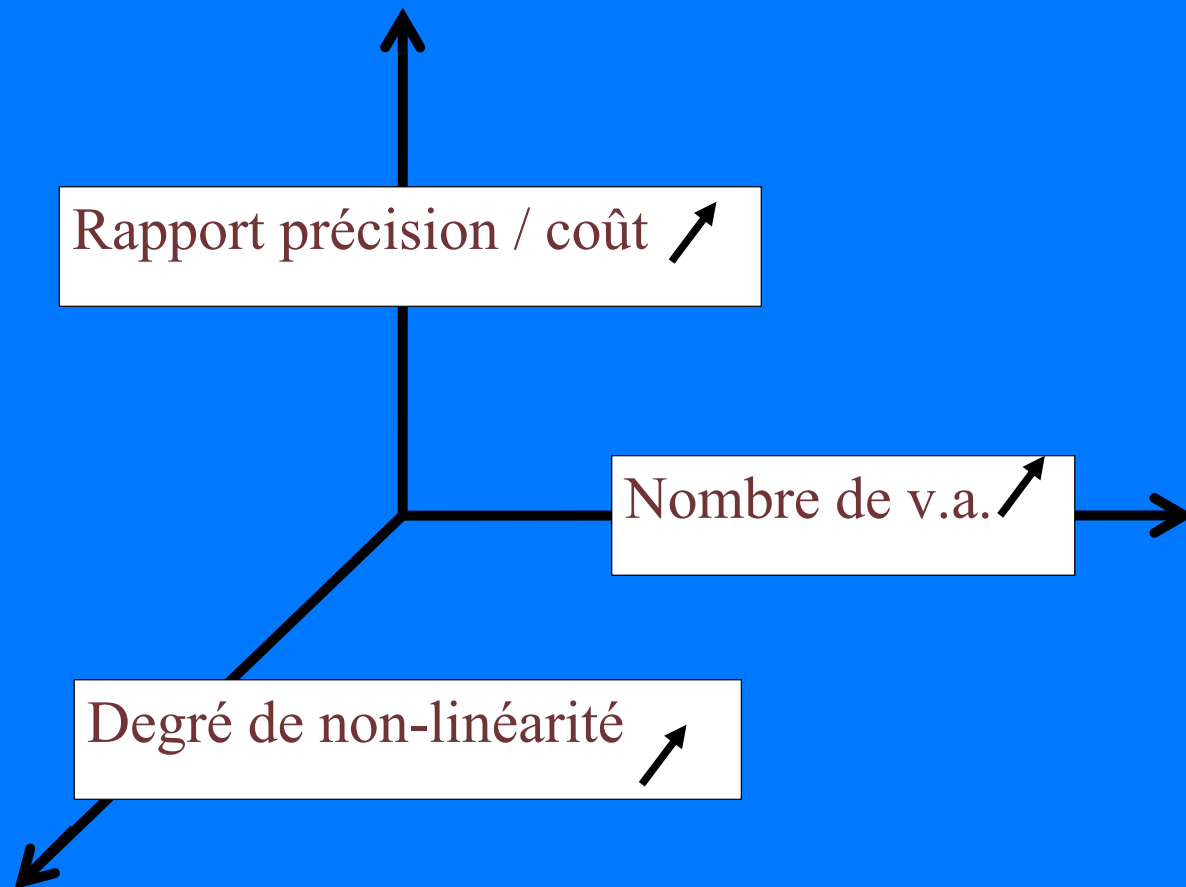
$P \gg 1$
 $N = 1$



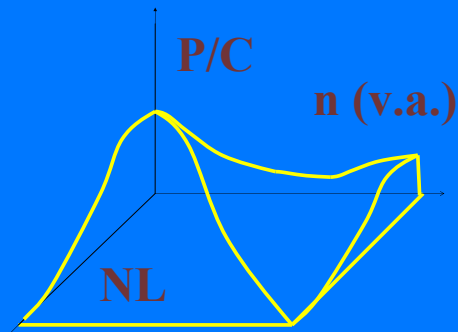
+ Représentations des champs aléatoires indépendantes ou non de la discrétisation géométrique



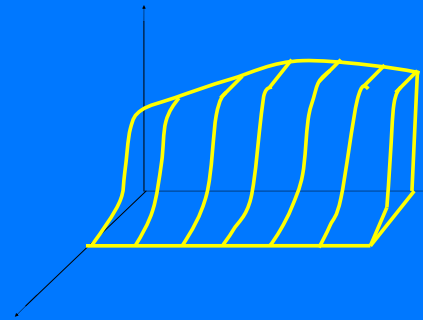
*+ Volume d'appréciation
du domaine de validité d'une méthode*



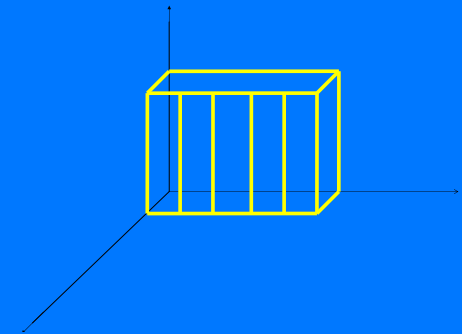
Comparaison des performances des méthodes



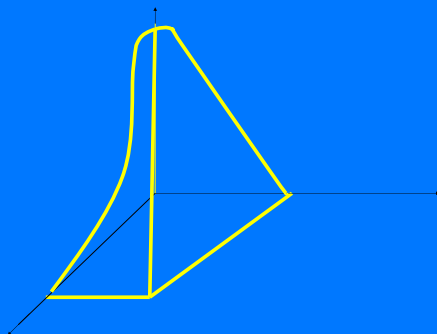
(a) Monte-Carlo



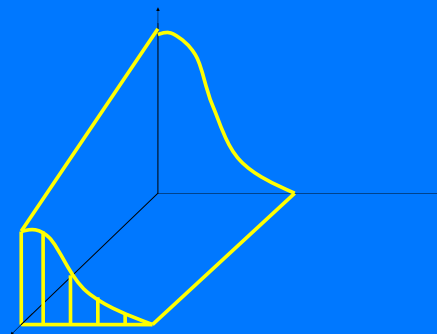
(b) MEFS Spectrale



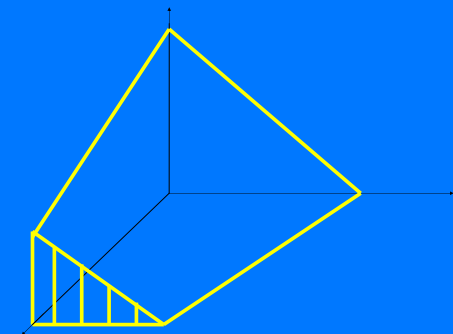
(c) Intégrales pondérées



(d) Perturbations



(e) Quadrature



(f) Surfaces de réponse



Deux types de méthodes choisies

- *L'approche spectrale, (Ghanem et Spanos, 1991)* → **Partie 2**

- modifie le modèle EF
- prend en compte des champs
- applicable en pratique à des problèmes linéaires

- *Méthodes non intrusives* → **Partie 3**

- ne modifient pas le modèle EF
- le nombre de variables aléatoires prises en compte est variable
- applicable à des problèmes non linéaires



Plan de la présentation

Introduction

1. Les MEFS, quelques éléments

2. Étude de la MEFS Spectrale

2.1. Formulation

2.2. Application à un assemblage bois par tiges collées

3. Approches non intrusives

Conclusion

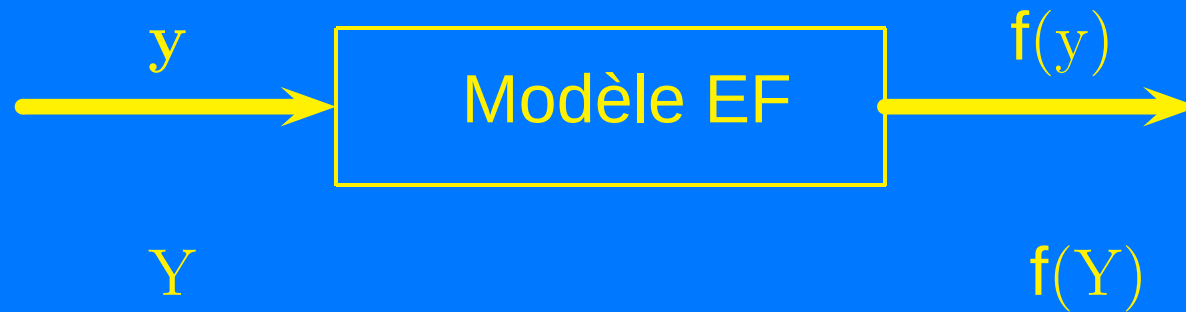
Domaine de validité

Modèle EF linéaire : $K(y, \mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathbf{r}$



$$K(\mathbf{Y}) \mathbf{Q} = \mathbf{r}$$

Étape 1 : modélisation de Y



$$Y = \begin{cases} \text{Option 1 : processus gaussien stationnaire} \\ \text{Option 2 : processus lognormal stationnaire} \\ \text{Option 3 : v.a. lognormale } \mathbf{vectorielle} \\ \text{Autres options...} \end{cases}$$



Étape 2 : Représentation des grandeurs aléatoires

Développement de Karhunen-Loève de l'entrée (Option 1)

$$Y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(x) \sqrt{\lambda_i} \sigma_i \dot{X}_i$$

Développement en chaos de Wiener de l'entrée (Options 2 à 3)

$$Y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(x) \Psi_j(\dot{\mathbf{X}}) \quad \mathbf{Y} = \sum_{j=0}^{\infty} e_j \Psi_j(\dot{\mathbf{X}})$$

Développement en chaos de Wiener de la réponse (Options 1 à 3)

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=0}^{\infty} e_j \Psi_j(\dot{\mathbf{X}})$$

Étape 2 : Représentation des grandeurs aléatoires

Polynômes d'Hermite sur $\mathbb{R}^2$

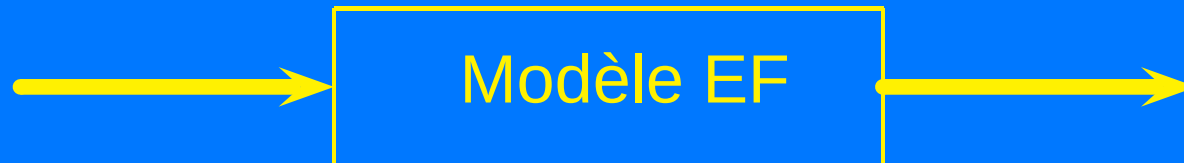
$$\left(\Psi_j(x_1, x_2)\right)_{j=0,1,2,\dots} = \left(1, x_1, x_2, x_1^2 - 1, x_2^2 - 1, x_1 x_2, \dots\right)$$

Développement en chaos de Wiener de dimension $M = 2$
et de plus haut degré $op = 3$

- Polynômes sur $(\mathbb{R}^d)_{1 \leq d \leq M}$
- M : nombre de v.a. d'entrée
- op : ordre de la base polynomiale

$$\left(\Psi_j(x_1, x_2)\right)_{0 \leq |\alpha| \leq op} = \left(1, x_1, x_2, x_1^2 - 1, \dots, x_1(x_2^2 - 1), x_2(x_1^2 - 1), \dots\right)$$

Étape 3 : discrétisation des grandeurs aléatoires d'entrée



$$\tilde{Y}(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^M g_i(x) \overset{\circ}{X}_i & \text{(Option 1)} \\ \sum_{j=0}^{P-1} e_j^M(x) \Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) & \text{(Option 2)} \\ \tilde{Y} = \sum_{j=0}^{P-1} e_j \Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) & \text{(Option 3)} \end{cases} \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \sum_{j=0}^{P-1} \mathbf{q}_j \Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}})$$

$$P = P(op, M) = \sum_{k=0}^{op} \mathbf{C}_{M-1+k}^k$$

Étape 4 : minimisation d'un résidu

$$\varepsilon = K(\tilde{Y})\tilde{\mathbf{Q}} - \mathbf{r}$$

$$\mathbb{E}[\varepsilon \Psi_n(\overset{\circ}{\mathbf{X}})] = 0 \quad , \quad \forall n \in \{0, \dots, P-1\}$$

$$\sum_{n=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} c_{nkj} K_n \mathbf{q}_k = \mathbf{r}_j \quad \text{pour } j = 0, \dots, P-1$$

$$c_{nkj} = \begin{cases} \mathbb{E}[\Psi_n \Psi_k \overset{\circ}{X}_j] & \text{(Option 1)} \\ \mathbb{E}[\Psi_n \Psi_k \Psi_j] & \text{(Options 2 et 3)} \end{cases}$$

Bilan de la modification du modèle

Modèle EF déterministe :

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{r}$$

taille $ddl \times ddl$

Modèle EF modifié :

$$\sum_{n=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} c_{nkj} K_n \mathbf{q}_k = \mathbf{r}_j \quad \text{pour } j = 0, \dots, P-1$$

taille $(ddl \times P) \times (ddl \times P)$

$$P = 3, \dots, 300$$

Résolution du nouveau système linéaire

Solution du système

$$\{\mathbf{q}_k\}^T = \{q_{1,k}, \dots, q_{j,k}, \dots, q_{ddl,k}\} \quad , \quad k = 0, \dots, P-1$$

$$Q_j \simeq \tilde{Q}_j = \sum_{k=0}^{P-1} q_{j,k} \Psi_k(\dot{\mathbf{X}}) \quad , \quad \mathbf{Q} = \{Q_j\}_{1 \leq j \leq ddl}$$

Moyenne et covariance de la v.a. $\tilde{Q}_j$

$$\mathbf{E}[\tilde{Q}_j] = q_{j,0} \quad \text{Cov}(\tilde{Q}_j \tilde{Q}_l) = \sum_{k=1}^{P-1} q_{j,k} q_{l,k} \mathbf{E}[(\Psi_j(\dot{\mathbf{X}}))^2]$$

$$\mathbf{E}[(\Psi_j(\dot{\mathbf{X}}))^2] = \prod_{l=1}^M j_l!$$

Résolution du nouveau système linéaire

Solution du système

$$\{\mathbf{q}_k\}^T = \{q_{1,k}, \dots, q_{j,k}, \dots, q_{ddl,k}\} \quad , \quad k = 0, \dots, P-1$$

$$Q_j \simeq \tilde{Q}_j = \sum_{k=0}^{P-1} q_{j,k} \Psi_k(\dot{\mathbf{X}}) \quad , \quad \mathbf{Q} = \{Q_j\}_{1 \leq j \leq ddl}$$

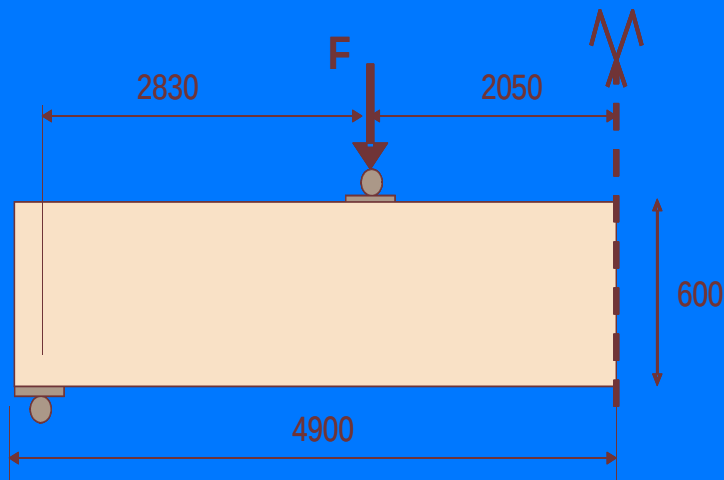
Moments $\tilde{\mu}_{\tilde{Q}_j}^\lambda$ d'ordre λ de la v.a. $\tilde{Q}_j$

$$\tilde{\mu}_{\tilde{Q}_j}^\lambda = \sum_{\alpha_1=0}^{\lambda} \sum_{\alpha_2=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\alpha_{P-1}=0}^{\alpha_{P-2}} A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{P-1}, \lambda} \times \gamma$$

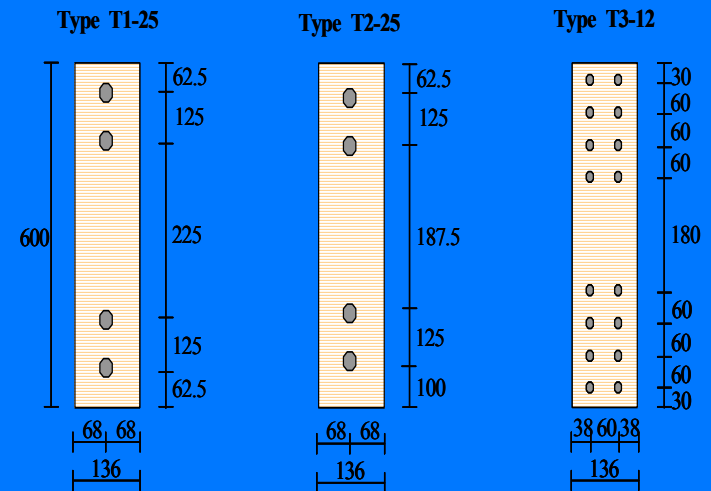
$$\gamma = \mathbb{E} \left[\left(\Psi_{\alpha_1}(\dot{\mathbf{X}}) \right)^{\lambda - \alpha_1} \left(\Psi_{P-1}(\dot{\mathbf{X}}) \right)^{\alpha_{P-1}} \prod_{j=1}^{P-2} \left(\Psi_{\alpha_j}(\dot{\mathbf{X}}) \right)^{\alpha_j - \alpha_{j+1}} \right]$$

2.2. Assemblage de poutres bois par tiges collées

- Besoins :
 - étude de sensibilité de l'assemblage
 - étude de faisabilité de la MEFSS

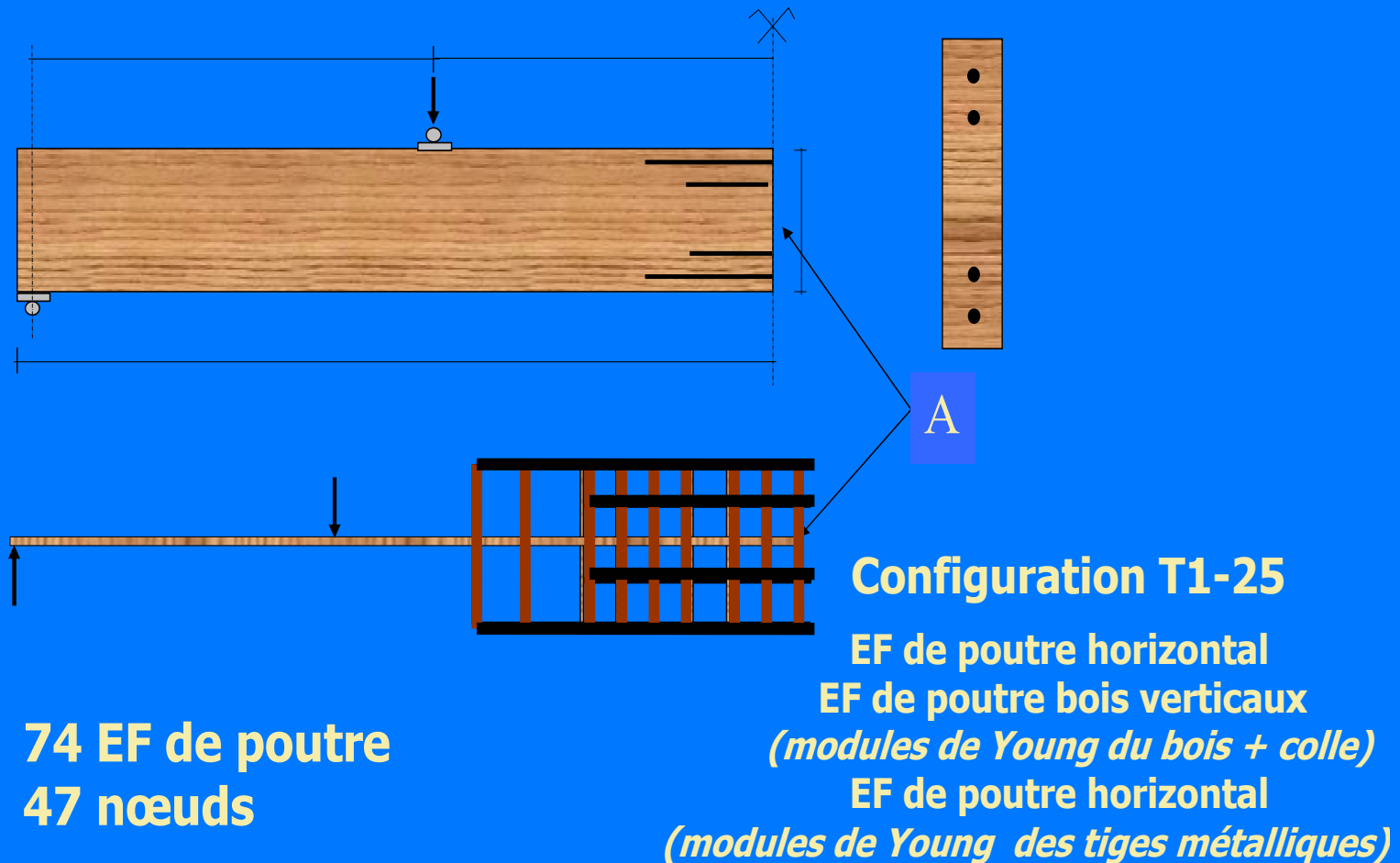


Dispositif expérimental



Trois sections (T1-25, T2-25, T3-12)

Modélisation EF de la zone d'assemblage





Modélisation probabiliste

Entrées (6 à 10 v.a. lognormales indépendantes)

1 v.a. : module d'élasticité longitudinal du bois

1 v.a. : module d'élasticité transversal (poutre bois + colle)

4 v.a. : modules d'élasticité longitudinaux des 4 tiges (cas T1-25)

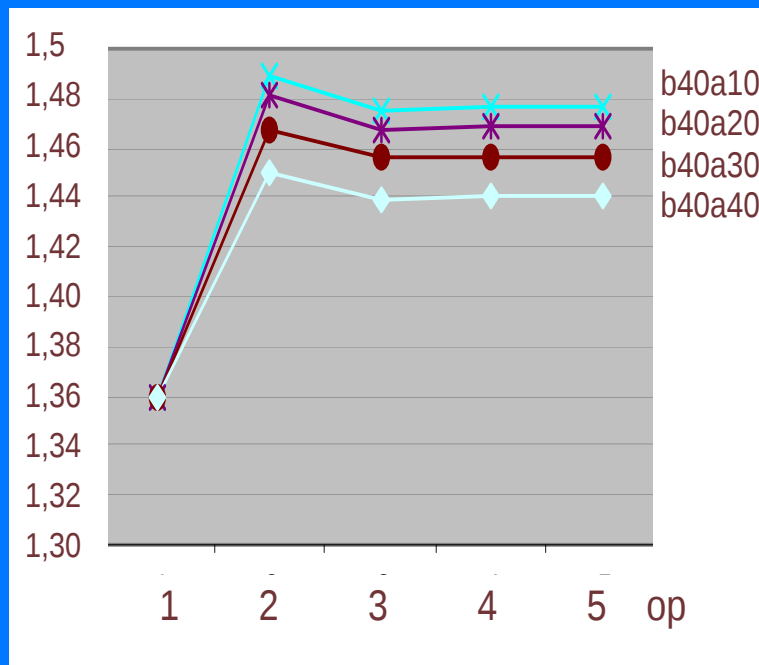
Sortie

Approximation en tout point de la moyenne et de la variance du déplacement et des efforts internes de la poutre

Analyse par EFSS

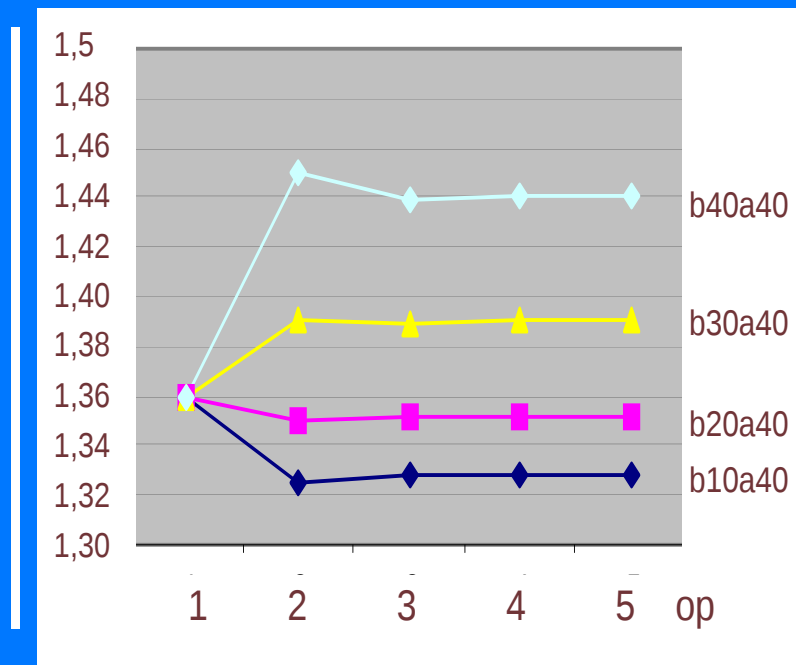
Sensibilité de la moyenne du moment fléchissant en A aux variations

$\mu_M (\times 10^6 N)$



du module de Young de l'acier

$\mu_M (\times 10^6 N)$

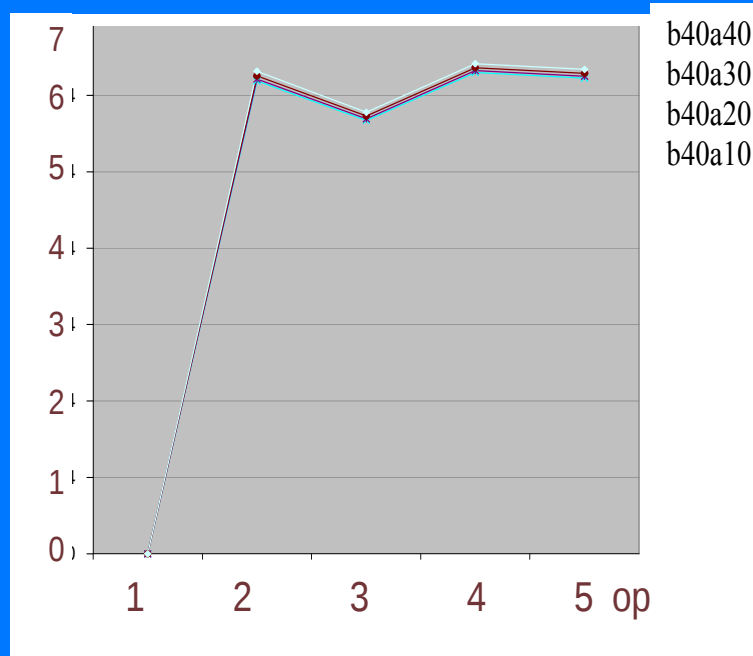


du module de Young du bois

Analyse par EFSS

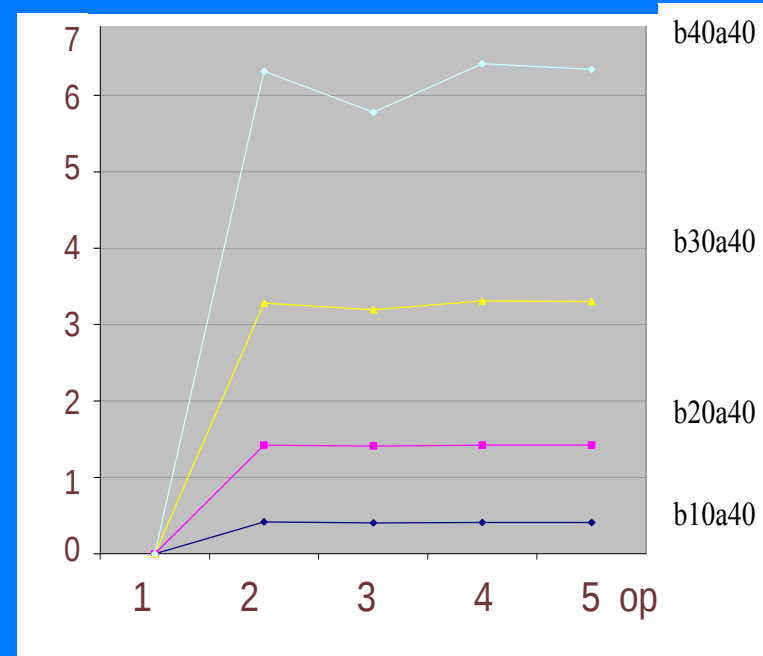
Sensibilité de l'écart-type du déplacement en A aux variations

$\sigma_U (\times 10^{-4} m)$



du module de Young de l'acier

$\sigma_U (\times 10^{-4} m)$



du module de Young du bois

Coût de calcul

■ Simulations de Monte-Carlo : 240 h

n_{sim} systèmes de taille ddl

$$n_{\text{sim}} = 50000$$

$$ddl \simeq 150$$

■ MEFSS : 8 mn 30 à 10 h 15

1 système de taille $P \times ddl$

$$P = ((op - 1) \times M) + 1$$

$$\text{ici } M = 6, \quad 2 \leq op \leq 5 \quad \Rightarrow 7 \leq P \leq 25$$

Limitation de la MEFS Spectrale

Adaptation à un problème non linéaire délicate

$$\begin{array}{ccccc} K(Y)Q = \mathbf{r} & & & & \mathbf{q} = \mathbf{f}(y) \\ & \longrightarrow & \boxed{\sum_{n=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} c_{nkj} K_n \mathbf{q}_k = \mathbf{r}_j} & \longrightarrow & \\ Y = \sum_{k=0}^{P-1} y_k \Psi_k(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) & & & & Q = \mathbf{f}(Y) \end{array}$$



Plan de la présentation

Introduction

1. Les MEFS, quelques éléments

2. Étude de la MEFS Spectrale

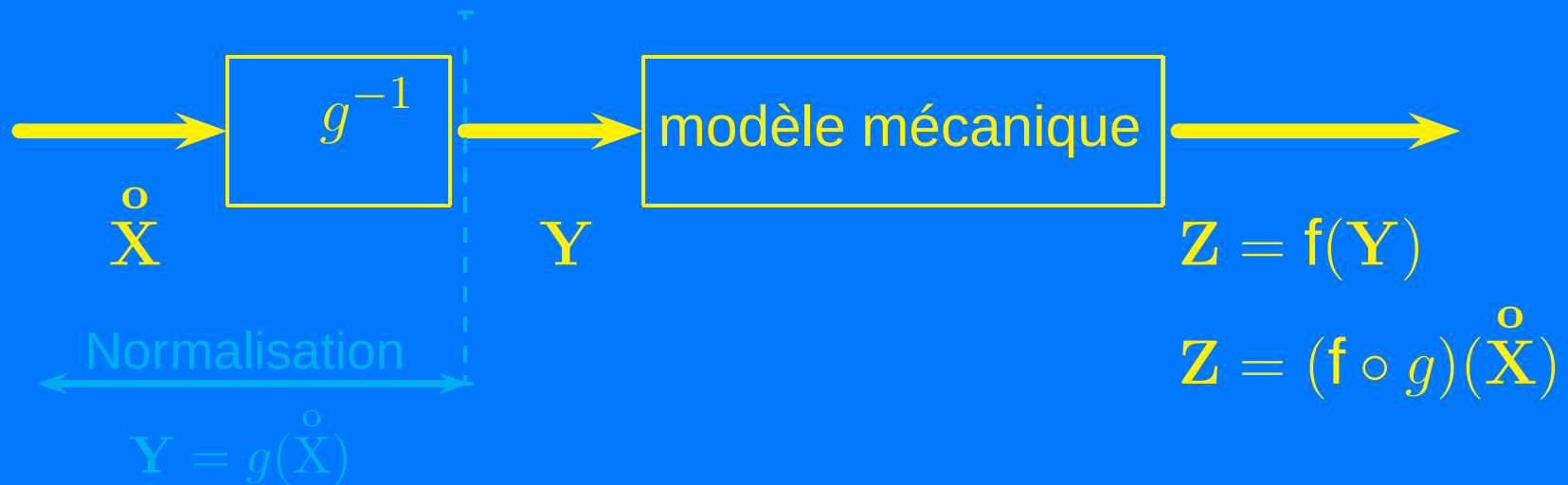
3. Approches non intrusives

3.1. Méthodes de collocation ; formules de Stroud

3.2. Applications et besoins de développement

Conclusion

Modèle aléatoire



formulation gaussienne standard ($\tilde{\mathbf{X}} \equiv \mathbf{G}$) $\Rightarrow \mathbf{Z} = \mathbf{F}_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$

formulation uniforme ($\tilde{\mathbf{X}} \equiv \mathbf{U}$) $\Rightarrow \mathbf{Z} = \mathbf{F}_{\mathbf{U}}(\mathbf{U})$

Méthode de collocation

Principe (Formulation gaussienne standard)

$$\blacksquare L_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^q \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad ; \quad \mathbf{F}_G(x) \simeq \sum_{i=1}^q \mathbf{F}_i L_i(x)$$

$$\blacksquare \boxed{(L_i(x_j) = \delta_{ij}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_G(x_i)}$$

$$\blacksquare \int_{\mathbb{R}} \mathbf{F}_G(x) \rho_G(x) dx = \sum_{i=1}^q \omega_i \mathbf{F}_i$$

Exact pour un polynôme $\mathbf{F}_G$ de degré $d \leq 2q - 1$,
avec (ω_i, x_i) correspondant aux points et poids
d'intégration (Gauss-Hermite, Gauss-Legendre,...)

Méthode de collocation

■ $\mu_{\mathbf{Z}} = \mathbb{E}[\mathbf{Z}]$

$$\mu_{\mathbf{Z}} \simeq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{F}_{\mathbf{G}}(x) \rho_{\mathbf{G}}(x) dx = \sum_{i=1}^q \omega_i \mathbf{F}_i$$

Méthode de collocation

■ $\mu_{\mathbf{Z}} = \mathbb{E}[\mathbf{Z}]$

$$\mu_{\mathbf{Z}} \simeq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{F}_{\mathbf{G}}(x) \rho_{\mathbf{G}}(x) dx = \sum_{i=1}^q \omega_i \mathbf{F}_i$$

■ $\mathbf{C}_{\mathbf{Z}} = \mathbb{E}[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T] - \mu_{\mathbf{Z}}^T \mu_{\mathbf{Z}}$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Z}} \simeq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{F}_{\mathbf{G}}(x) \mathbf{F}_{\mathbf{G}}^T(x) \rho_{\mathbf{G}}(x) dx - \mu_{\mathbf{Z}}^T \mu_{\mathbf{Z}} = \sum_{i=1}^q \omega_i \mathbf{F}_i \mathbf{F}_i^T - \mu_{\mathbf{Z}}^T \mu_{\mathbf{Z}}$$

Méthode de collocation

■ $\mu_{\mathbf{Z}} = \mathbb{E}[\mathbf{Z}]$

$$\mu_{\mathbf{Z}} \simeq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{F}_{\mathbf{G}}(x) \rho_{\mathbf{G}}(x) dx = \sum_{i=1}^q \omega_i \mathbf{F}_i$$

■ $\mathbf{C}_{\mathbf{Z}} = \mathbb{E}[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T] - \mu_{\mathbf{Z}}^T \mu_{\mathbf{Z}}$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Z}} \simeq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{F}_{\mathbf{G}}(x) \mathbf{F}_{\mathbf{G}}^T(x) \rho_{\mathbf{G}}(x) dx - \mu_{\mathbf{Z}}^T \mu_{\mathbf{Z}} = \sum_{i=1}^q \omega_i \mathbf{F}_i \mathbf{F}_i^T - \mu_{\mathbf{Z}}^T \mu_{\mathbf{Z}}$$

■ Produit tensoriel

$$\int_{\mathbb{R}^M} \mathbf{F}_{\mathbf{G}}(x) \rho_{\mathbf{G}}(x) dx = \sum_{i_1=1}^q \cdots \sum_{i_M=1}^q \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_M} \mathbf{F}_{i_1 \cdot i_M} \mathbf{F}_{i_1 \cdot i_M}^T$$

Méthode de collocation

■ $\mu_{\mathbf{Z}} = \mathbb{E}[\mathbf{Z}]$

$$\mu_{\mathbf{Z}} \simeq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{F}_{\mathbf{G}}(x) \rho_{\mathbf{G}}(x) dx = \sum_{i=1}^q \omega_i \mathbf{F}_i$$

■ $\mathbf{C}_{\mathbf{Z}} = \mathbb{E}[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T] - \mu_{\mathbf{Z}}^T \mu_{\mathbf{Z}}$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Z}} \simeq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{F}_{\mathbf{G}}(x) \mathbf{F}_{\mathbf{G}}^T(x) \rho_{\mathbf{G}}(x) dx - \mu_{\mathbf{Z}}^T \mu_{\mathbf{Z}} = \sum_{i=1}^q \omega_i \mathbf{F}_i \mathbf{F}_i^T - \mu_{\mathbf{Z}}^T \mu_{\mathbf{Z}}$$

■ Produit tensoriel

$$\int_{\mathbb{R}^M} \mathbf{F}_{\mathbf{G}}(x) \rho_{\mathbf{G}}(x) dx = \sum_{i_1=1}^q \cdots \sum_{i_M=1}^q \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_M} \mathbf{F}_{i_1 \cdot i_M} \mathbf{F}_{i_1 \cdot i_M}^T$$

■ Nombre d'appels au modèle EF : $= q^M$

Méthode de collocation

Algorithme

- calculer les q réponses du système mécanique

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_G(x_i) \text{ pour } i = 1, \dots, q,$$

- écrire la solution telle que $\mathbf{F}_G(x) \simeq \sum_{i=1}^q \mathbf{F}_i L_i(x),$

- calculer les statistiques cibles

$$\mu_Z \simeq \sum_{i=1}^q \omega_i \mathbf{F}_i ; \mathbf{C}_Z \simeq \sum_{i=1}^q \omega_i \mathbf{F}_i \mathbf{F}_i^T.$$

- approcher une fonction de densité de probabilité (ou fonction de répartition) à partir de $\mathbf{F}_G(x)$

Méthode basée sur les formules de Stroud

Principe (Formulation uniforme)

$$\blacksquare \mathbf{I} = \int_{[-1,1]^M} \mathbf{f}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \simeq \sum_{i=1}^{M+1} \omega_i \mathbf{f}(\mathbf{u}_i) \quad (\text{Stroud-2})$$

Optimal pour un polynôme $\mathbf{f}$ de degré 2

$$\blacksquare \mathbf{I} = \int_{[-1,1]^M} \mathbf{f}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \simeq \sum_{i=1}^{2M} \omega_i^* \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^*) \quad (\text{Stroud-3})$$

Optimal pour un polynôme $\mathbf{f}$ de degré 3

avec $(\omega_i, \mathbf{u}_i)$ or $(\omega_i^*, \mathbf{u}_i^*)$ les points et poids issus de (Mysovskih, 1966)

Méthode basée sur les formules de Stroud

Algorithme Stroud-2

- calculer les $(M + 1)$ réponses du système mécanique

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_U(\mathbf{u}_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq M + 1,$$

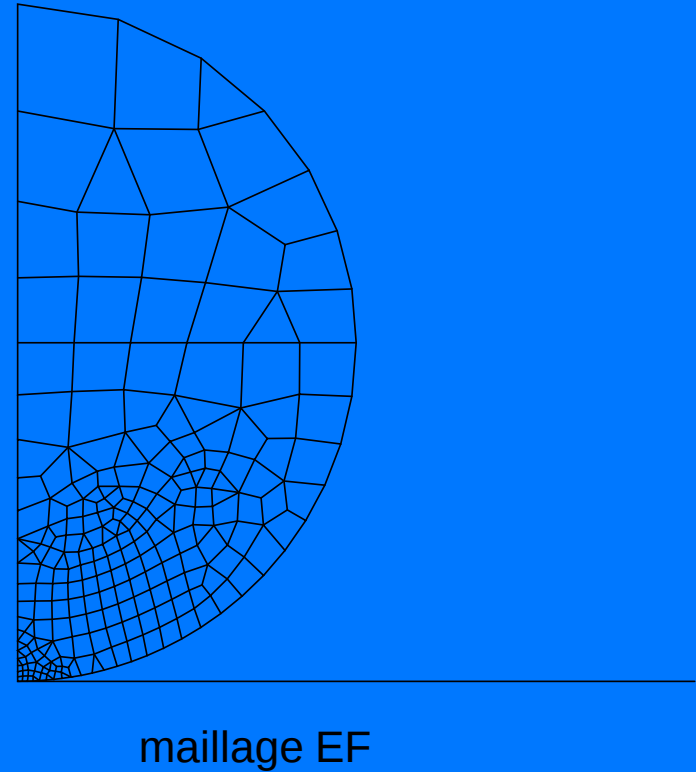
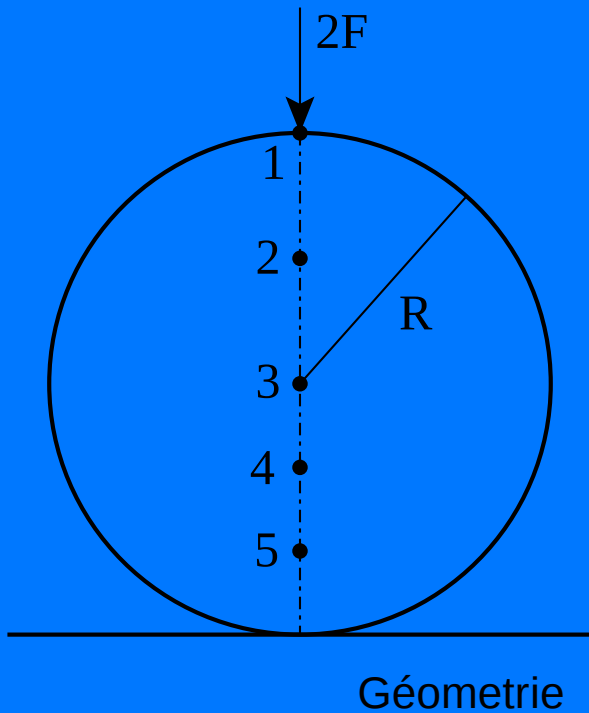
- écrire la solution telle que $\mathbf{F}_U(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{M+1} \mathbf{F}_i L_i(\mathbf{u})$,

- calculer les statistiques

$$\mu_Z \simeq \frac{1}{2^M} \sum_{i=1}^{M+1} \omega_i \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{C}_Z \simeq \frac{1}{2^M} \sum_{i=1}^{M+1} \omega_i \mathbf{F}_i \mathbf{F}_i^T - \mu_Z^T \mu_Z$$

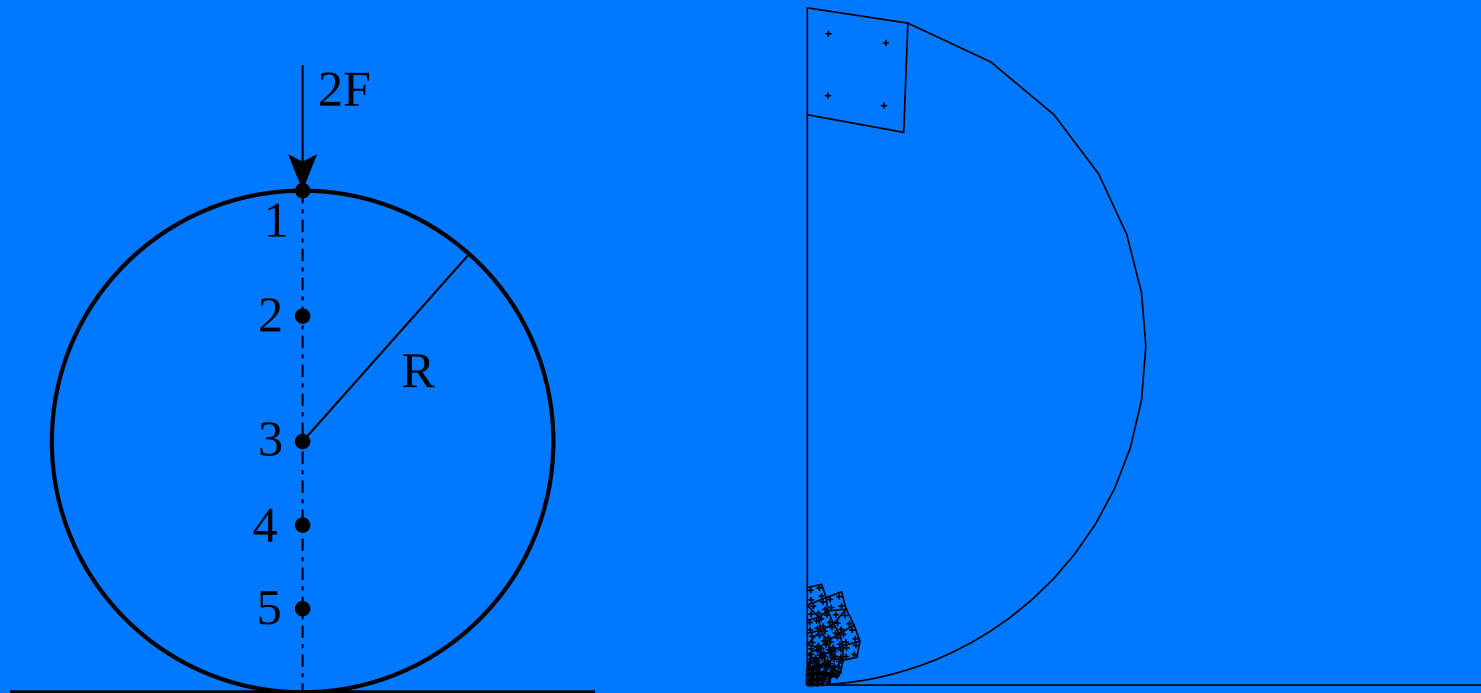
Application au problème de Hertz



paramètres incertains d'entrée : module de Young E , module plastique E_P , rayon R , 1/2 force F

Sorties : Déplacements verticaux z_1 à z_5

Problème de contact de Hertz



Géometrie

EF maillage (aire plastifiée)

4 v.a. d'entrée : corrélées, lognormales, $Y_1, \dots, Y_4$, $cov = 0.1$, $\rho_{Y_1 Y_2} = 0.9$

v.a. de sortie : Z_1, Z_3 , caractérisées par $\mu_{Z_1}, \mu_{Z_3}, \sigma_{Z_1}, \sigma_{Z_3}, \rho_{Z_1 Z_3}$



Résultats :

Erreurs (%) sur les moyennes, écart types, coefficients de corrélation, nombres d'appels au modèle EF, temps CPU

	μ_{Z_1}	μ_{Z_3}	σ_{Z_1}	σ_{Z_3}	$\rho_{Z_1 Z_3}$	N_{call}	CPU
L-2	0.10	0.04	0.23	0.35	$3 \cdot 10^4$	16	7'40
L-3	0.06	0.04	0.24	0.33	8.43	81	41'2
L-4	0.006	$6 \cdot 10^{-4}$	0.24	0.14	1.37	256	2h26
L-5	-	-	-	-	-	625	7h16

Résultats :

Erreurs (%) sur les moyennes, écart types, coefficients de corrélation, nombres d'appels au modèle EF, temps CPU

	μ_{Z_1}	μ_{Z_3}	σ_{Z_1}	σ_{Z_3}	$\rho_{Z_1 Z_3}$	N_{call}	CPU
L-2	0.10	0.04	0.23	0.35	$3 \cdot 10^4$	16	7'40
L-3	0.06	0.04	0.24	0.33	8.43	81	41'2
L-4	0.006	$6 \cdot 10^{-4}$	0.24	0.14	1.37	256	2h26
L-5	-	-	-	-	-	625	7h16
MC	0.03	0.02	0.16	0.33	4.72	10^4	122h6

Résultats :

Erreurs (%) sur les moyennes, écart types, coefficients de corrélation, nombres d'appels au modèle EF, temps CPU

	μZ_1	μZ_3	σZ_1	σZ_3	$\rho Z_1 Z_3$	N_{call}	CPU
S-2	1.29	1.04	3.00	1.79	123	5	2'11
S-3	0.85	0.86	8.55	12.9	205	8	3'35
L-2	0.10	0.04	0.23	0.35	$3 \cdot 10^4$	16	7'40
L-5	-	-	-	-	-	625	7h16

Résultats :

Erreurs (%) sur les moyennes, écart types, coefficients of corrélation et nombres d'appels au modèle EF et temps CPU

	μ_{Z_1}	μ_{Z_3}	σ_{Z_1}	σ_{Z_3}	$\rho_{Z_1 Z_3}$	N_{call}	CPU
S-2	1.29	1.04	3.00	1.79	123	5	2'11
S-3	0.85	0.86	8.55	12.9	205	8	3'35
L-2	0.10	0.04	0.23	0.35	$3 \cdot 10^4$	16	7'40
L-3	0.06	0.04	0.24	0.33	8.43	81	41'2
L-4	0.006	$6 \cdot 10^{-4}$	0.24	0.14	1.37	256	2h26
L-5	-	-	-	-	-	625	7h16
MC	0.03	0.02	0.16	0.33	4.72	10^4	122h6



CONCLUSIONS

- Avantages/limites de Stroud :
 - + Approximation économique d'une intégrale multidimensionnelle ; - Approximation des 1ers moments statistiques seulement...
- Avantages/limites de la collocation :
 - Approximation lourde d'une intégrale multidimensionnelle ; + Approximation aisée de fonctions de densités de probabilités, intervalles de confiance, quantiles, fonctions de répartition...
- Applications de la collocation : assemblages mixtes acier/béton ou bois, paravalanche, pare-blocs, stabilité des pentes, problème d'excavation...