UNIVERSITE BORDEAUX I

THALES

Une approche analytique permettant d'obtenir la fiabilité d'équipements embarqués

IMdR FIMA – Grenoble – 8 février 2007

Aéronautique

Participants

Julie Berthon
Stéphane Charruau

Jaromir Antoch
Jean-Marc Deshouillers
Yves Dutuit

- **Contexte de l'étude :**
  - ✓ Hypothèses
  - ✓ Données
  - ✓ Objectif
- **Formulation du problème**
- **Méthodologie de résolution**
- **Exemple : données simulées**

Une population d'équipements électroniques :

- **Ayant même loi de survie : loi de Weibull**
  - Même design, même process
- **Ayant le même profil de mission**
  - Conditions d'exploitation similaires
- **Non réparés**
- **Entrés en service à différentes dates**

Données à disposition : fichiers de faits techniques

Date de mise en service
de l'équipement

Date de la panne	N°série de l'équipement déposé	…	Date de garantie	Temps de fonctionnement avant la panne	Livraisons du mois correspondant
02/05/2006	490	…	?	?	?
25/05/2004	494	…	?	?	?
15/01/2005	502	…	?	?	?

Age de l'équipement au moment de la panne

Les dates de mise en service des équipements ne sont pas connues

DEUX TYPES DE DONNEES SONT DISPONIBLES

FLUX DE LIVRAISON

Nombre d'unités livrées sur chaque intervalle de temps

FLUX DE DEPOSES

Nombre d'unités en panne sur chaque intervalle de temps

?

EST-CE SUFFISANT POUR DETERMINER LA FIABILITE INTRINSEQUE DES EQUIPMENTS OBSERVES ?

- $E = \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ un ensemble d'équipements
- $V(t-t_i)$ la fiabilité à la date t pour l'équipement e_i mis en service à la date t_i
- $Q(t)$ le nombre d'équipements mis en service avant la date t
- $R(t)$ le nombre d'équipements déposés avant la date t

$$W(t) = \prod_{e_i \in E} V(t - t_i)$$

W(t) : probabilité qu'aucun équipement ne soit déposé avant la date t

- **W prend de très petites valeurs**
- **W ne peut être directement observée**
- **W caractérise le comportement de la population**

$$\ln W(t) = \sum_{e_i \in E} \ln V(t - t_i)$$

Intégrale de Stieltjes

$$\ln W(t) = -\int_0^t \ln V(t-u)\,dQ(u) = -\int_0^t Q(t-u)\lambda(u)\,du$$

W(t) & Q(t) & λ(t) sont reliés par un produit de convolution

$$-\ln W(t) = Q(t) * \lambda(t)$$

☺ **Il est possible de déterminer le taux de défaillance intrinsèque λ lorsque W et Q sont connus**

☹ **W est inconnu**

$$W(t) \approx \begin{cases} \left(1 - \dfrac{R(t)}{Q(t)}\right)^{Q(t)} \\ e^{-R(t)} \end{cases}$$

pour des équipements très fiables

$$X(t) = f(Q(t), R(t)) \approx Q(t) * \lambda(t)$$

?

Comment récupérer le taux de défaillance ?

?

$$X(t) \approx Q(t) * \lambda(t)$$

- Approche paramétrique : $\lambda(t)$ est le taux de défaillance correspondant à une loi de Weibull
- Q(t) & X(t) approchées par des fonctions permettant l'application de transformées de Laplace et Laplace inverse

$$L\lambda(t) \approx \frac{LX(t)}{LQ(t)}$$

SUR UN JEU DE DONNEES SIMULEES

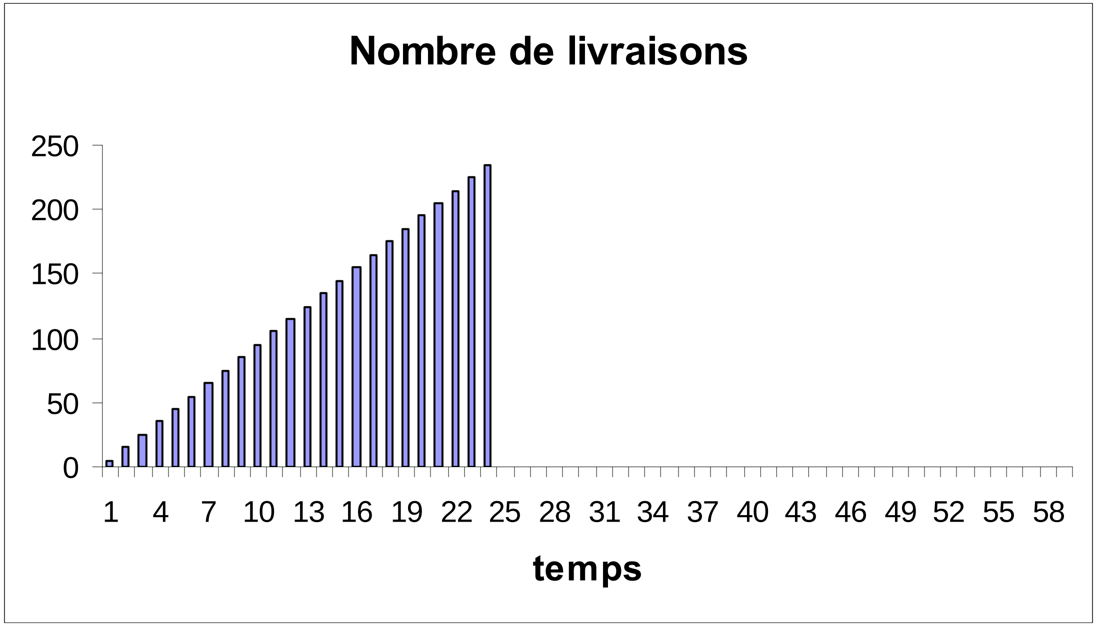
- Simulation d'un flux de production d'équipements :

Q(t)

- Génération aléatoire des dates de panne selon une loi de Weibull

R(t)

- Application de la méthode de Kaplan-Meier
- Application de la méthode présentée



Accroissement linéaire du nombre de livraisons:

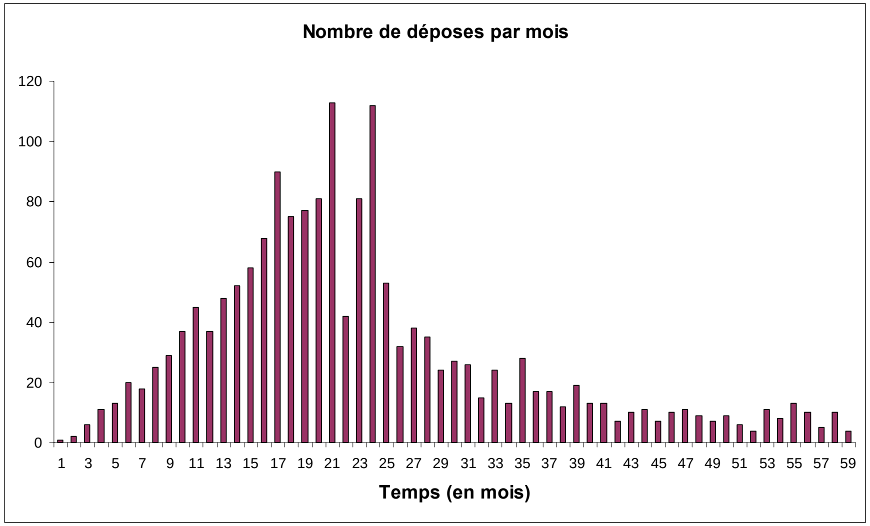
$$Q(t_{i+1})-Q(t_i)=10t_i+5$$

Production

Loi de survie

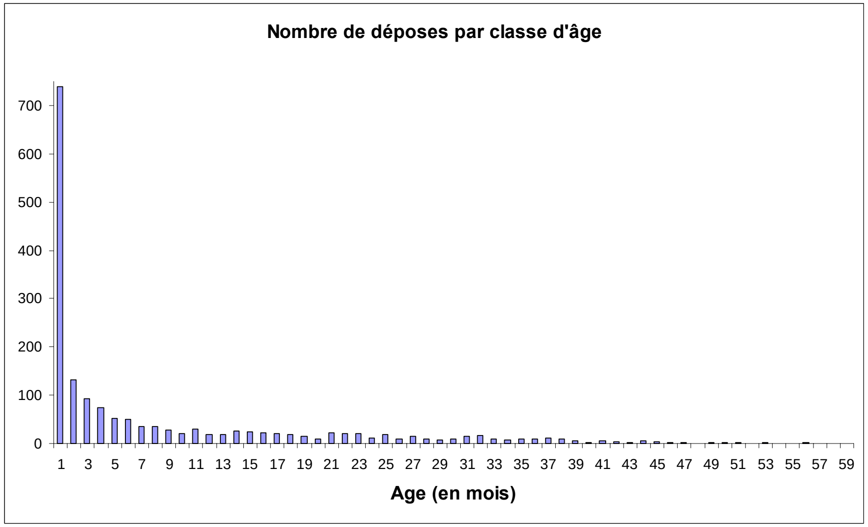
Weibull(β=0.3;η=60)

Exemple (données simulées)



Histogramme des pannes par intervalle de temps

Méthode convolutive



Histogramme des pannes par classes d'âge

Méthode de Kaplan-Meier

RESULTATS OBTENUS PAR SIMULATION

	Kaplan-Meier	Méthode convolutive
Valeur moyenne de β	0.29	0.29
Ecart-type de β	0.010	0.013
Valeur moyenne de η	63	64
Ecart-type de η	5.4	4.4

☺

Méthode testée sur des jeux de données simulées: bons résultats

☺

Méthode testée sur des données opérationnelles

☺

Implémentation très simple

☺

Solution alternative efficace lorsque les temps à la défaillance sont inconnus

à la date t_i

q_i unités livrées → **D_i défaillants** à la date t

→ **$q_i - D_i$ survivants** à la date t

$$W(t) = \prod_{i, t_i \le t} V(t - t_i) = \prod_{i, t_i \le t} (1 - F(t - t_i))$$

$$-\ln W(t) = -\sum_{i, t_i \le t} \{q_i \times \ln(1 - F(t - t_i))\}$$

$$-\ln W(t) = +\sum_{i, t_i \le t} \{q_i \times F(t - t_i)\}$$

$$F(t - t_i) << 1$$

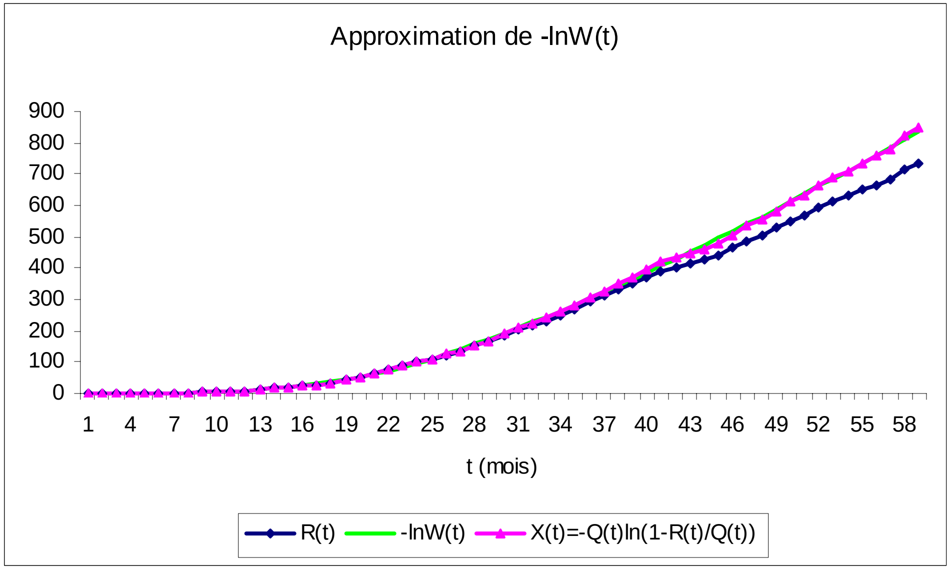
Pour des équipements « très fiables » ou bien lorsque l'instant d'observation t est nettement inférieur à la durée de vie des matériels :

$$\ln W(t) \approx R(t)$$

De manière générale, on constate que lnW(t) peut être approchée par

$$X(t) = -Q(t)\ln\left(1 - \frac{R(t)}{Q(t)}\right)$$

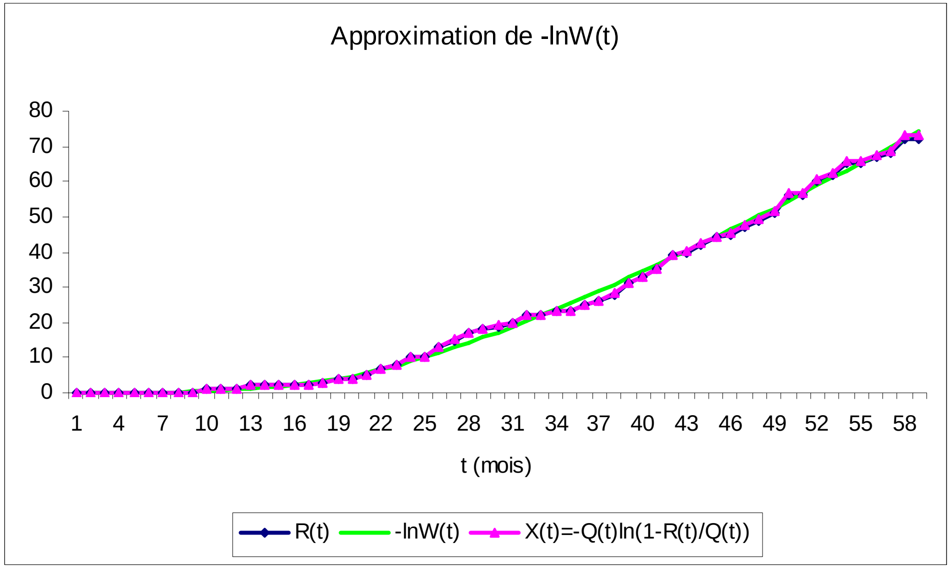
Exemple : la loi de survie est une loi de Weibull de paramères β = 1,5 et η = 100



De manière générale, on constate que lnW(t) peut être approchée par

$$X(t) = -Q(t)\ln\left(1 - \frac{R(t)}{Q(t)}\right)$$

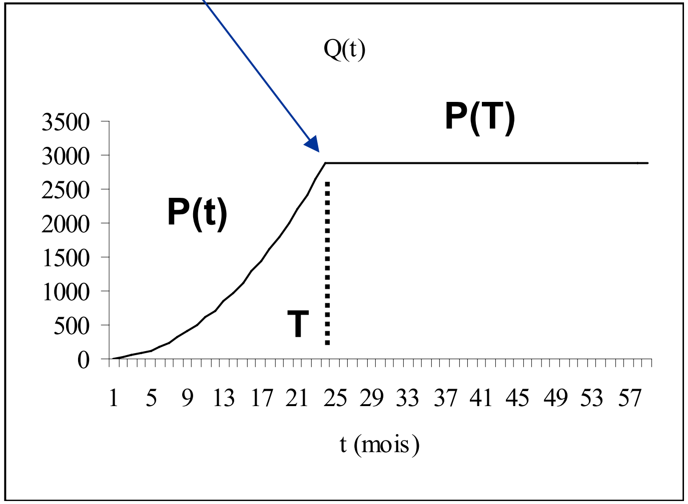
Exemple : la loi de survie est une loi de Weibull de paramères β = 1,5 et η = 500



$$L\lambda(t) \approx \frac{LX(t)}{LQ(t)}$$

Par quel type de fonctions approcher Q et X ?

Fin de la production



Q(t) est approché par une fonction polynomiale :

$$Q(t) = P(t)\left[\gamma(t) - \gamma(t-T)\right] + P(T)\gamma(t-T)$$

où $\gamma(t)$: fonction d'Heaviside

$$P(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i t^i$$

$$\Downarrow$$

$$LQ(t) = \sum_{i=0}^{m} P^{(i)}(0)\frac{1}{s^{i+1}} - \sum_{i=1}^{m} P^{(i)}(T)e^{-sT}\frac{1}{s^{i+1}}$$

$$L\lambda(t) \approx \frac{LX(t)}{LQ(t)}$$

Approche paramétrique : $\lambda(t)$ est le taux de défaillance correspondant à une loi de Weibull :

$$\lambda(t) = ct^{n} \quad \Rightarrow \quad L(\lambda(t)) = c\Gamma(n+1)s^{n+1}$$

Sous ces conditions, la transformée de Laplace de la fonction X(t) s'écrit :

$$L(X(t)) = \sum_{i=0}^{m} \frac{c\Gamma(n+1)P^{(i)}(0)}{s^{n+i+2}} - \sum_{i=1}^{m} \frac{c\Gamma(n+1)P^{(i)}(T)e^{-sT}}{s^{n+i+2}}$$

et la fonction X(t) s'écrit :

$$X(t) = c\Gamma(n+1)\sum_{i=0}^{m} \frac{P^{(i)}(0)t^{n+1+i}}{\Gamma(n+2+i)} - c\Gamma(n+1)\sum_{i=1}^{m} \frac{P^{(i)}(T)\gamma(t-T)(t-T)^{n+1+i}}{\Gamma(n+2+i)}$$

$$L\lambda(t) \approx \frac{LX(t)}{LQ(t)}$$

1. Modélisation de Q par un polynôme

2. Recherche des réels c et n donnant la meilleure approximation de X au sens des moindres carrés, sous la forme :

$$X(t) = c\Gamma(n+1)\sum_{i=0}^{m}\frac{P^{(i)}(0)t^{n+1+i}}{\Gamma(n+2+i)} - c\Gamma(n+1)\sum_{i=1}^{m}\frac{P^{(i)}(T)\gamma(t-T)(t-T)^{n+1+i}}{\Gamma(n+2+i)}$$

3. Le taux de défaillance s'écrit :

$$\boxed{\lambda(t) = ct^{n}}$$

Illustration de la formule $-\ln W(t) = Q(t) * \lambda(t)$

PRODUCTION

4 mises en service, le nombre d'équipements en service augmente linéairement :
$1^{ère}$ mise en service : q équipements
$2^{ème}$ mise en service : 2q équipements
$3^{ème}$ mise en service : 3q équipements
$4^{ème}$ mise en service : 4q équipements

$$Q(t) = q\gamma(t) + 2q\gamma(t-1) + 3q\gamma(t-2) + 4q\gamma(t-3) \Rightarrow LQ(t) = \frac{q}{s}\left(1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s} + 4e^{-3s}\right)$$

LOI DE SURVIE exponentielle

$$\ln W(t) = \sum_{e_i \in E} \ln V(t - t_i) \Rightarrow \begin{aligned} L(\ln W(t)) &= qL(\ln V(t))\left(1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s} + 4e^{-3s}\right) \\ &= \frac{10\lambda}{s^2}\left(1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s} + 4e^{-3s}\right) \end{aligned}$$

CONCLUSION

On retrouve le taux de défaillance constant : $L\lambda(t) = \frac{\lambda}{s}$ **et** $\boxed{\lambda(t) = \lambda}$