

Renouvellement markovien et fiabilité prévisionnelle

Christiane Coccozza-Thivent
christiane.coccozza@univ-mlv.fr

Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées
UMR CNRS 8050

Plan

Introduction

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus pilotés

Plan

Introduction

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus pilotés

Introduction

L'évolution temporelle d'un matériel (ou système) est modélisée par un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ cad-lag à valeurs dans F .

La structure du matériel est décrite par une partition $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ de F

- \mathcal{M} est l'ensemble des états de marche,
- \mathcal{P} est l'ensemble des états de panne.

Exemple le matériel est formé n composants, chacun pouvant être en marche (état 1) ou en panne (état 0) :

$$F = \{0, 1\}^n$$

- les composants sont en série : $\mathcal{M} = \{(1, \dots, 1)\}$,
- les composants sont en parallèle : $\mathcal{P} = \{(0, \dots, 0)\}$,
- les composants sont en redondance k sur n (le matériel fonctionne si au moins k composants fonctionnent) :

$$\mathcal{M} = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, \sum_{i=1}^n x_i \geq k\}$$

Quelques indicateurs de sûreté de fonctionnement

Fiabilité (Reliability) probabilité que le matériel fonctionne sur tout l'intervalle de temps $[0, t]$:

$$R(t) = \mathbb{P}(X_s \in \mathcal{M} \forall s \leq t) = \mathbb{P}(T > t) = \bar{F}(t),$$

T : premier instant de panne ou première durée de fonctionnement sans défaillance,

\bar{F} : fonction de survie associée à T .

Quelques indicateurs de sûreté de fonctionnement

Si S est un v.a. positive dont la loi a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$\mathbb{P}(S > t) = e^{-\int_0^t h(s) ds},$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \quad \text{taux de hasard,}$$

$$\mathbb{P}(S \in]t, t + \Delta] / S > t) = h(t) \Delta + o(\Delta).$$

Si S est une durée de fonctionnement, $h = \lambda$: **taux de défaillance**, et

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}.$$

Si S est une durée de réparation, $h = \mu$: **taux de réparation**.

Quelques indicateurs de sûreté de fonctionnement

Disponibilité probabilité que le matériel fonctionne à l'instant t :

$$D(t) = \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M}).$$



MUT : Mean Up Time

$$\text{MUT} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_k)$$

MDT : Mean Down Time

$$\text{MDT} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(P_k)$$

MTBF : Mean Time Between Failure

$$\text{MTBF} = \text{MUT} + \text{MDT}$$

La formule "bien connue"

Disponibilité asymptotique :

$$D(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} D(t)$$

$$D(\infty) = \frac{MUT}{MTBF}$$

Démonstration ?

La formule bien connue



Exemple de la modélisation par un processus de renouvellement alterné

Dans un **processus de renouvellement alterné**

- toutes les durées sont indépendantes,
- toutes les durées de fonctionnement ont même loi,
- toutes les durées de réparation ont même loi.

La formule bien connue



Exemple de la modélisation par un processus de renouvellement alterné

Dans un **processus de renouvellement alterné**

- toutes les durées sont indépendantes,
- toutes les durées de fonctionnement ont même loi,
- toutes les durées de réparation ont même loi.

$$\begin{aligned}
 D(t) &= \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M}, t < M_1 + P_1) + \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M}, t \geq M_1 + P_1) \\
 &= \mathbb{P}(t < M_1) + \int_0^t \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M} / M_1 + P_1 = s) \mu_{M_1 + P_1}(ds)
 \end{aligned}$$

La formule bien connue



Exemple de la modélisation par un processus de renouvellement alterné

Dans un **processus de renouvellement alterné**

- toutes les durées sont indépendantes,
- toutes les durées de fonctionnement ont même loi,
- toutes les durées de réparation ont même loi.

$$\begin{aligned}
 D(t) &= \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M}, t < M_1 + P_1) + \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M}, t \geq M_1 + P_1) \\
 &= \mathbb{P}(t < M_1) + \int_0^t \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M} / M_1 + P_1 = s) \mu_{M_1 + P_1}(ds) \\
 &= \mathbb{P}(M_1 > t) + \int_0^t D(t - s) \mu_{M_1 + P_1}(ds)
 \end{aligned}$$

car l'instant $M_1 + P_1$ est un instant de régénération.

La formule bien connue

C'est de la forme

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(t-s) \nu(ds) \quad \text{équation de renouvellement}$$

avec

$$f(t) = D(t), \quad g(t) = \mathbb{P}(M_1 > t), \quad \nu = \mu_{M_1+P_1}.$$

On applique le **théorème de renouvellement de Blackwell**. Si $\mu_{M_1+P_1}$ est non arithmétique et si $\mathbb{E}(M_1) < +\infty$, on obtient :

$$D(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}(M_1 + P_1)} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(M_1 > s) ds = \frac{\mathbb{E}(M_1)}{\mathbb{E}(M_1 + P_1)} = \frac{\text{MUT}}{\text{MTBF}}.$$

La formule bien connue ?

On en déduit le résultat pour un processus de renouvellement alterné modifié, i.e. la loi de la première durée de fonctionnement est différente des autres.

Mais en général, dans le cas d'un système qui n'est pas "purement série" ou "purement parallèle" avec taux constants, **on n'a pas un processus de renouvellement alterné même modifié** : ni indépendance, ni même loi.

La formule bien connue ?

Si les instants de remise en fonctionnement du matériel sont des instants de semi-régénération (oubli du passé strict) :

$$\begin{aligned} D_y(t) &= \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M} / X_0 = y) \\ &= \mathbb{P}(t < M_1 / X_0 = y) + \\ &\quad \int_{\mathbb{F} \times [0, t]} \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M} / M_1 + P_1 = s, X_{M_1 + P_1} = z) N(y, dz, ds) \end{aligned}$$

$N(y, dz, ds)$: loi de $(X_{M_1 + P_1}, M_1 + P_1)$ sachant $X_0 = y$.

La fonction $f(y, t) = D_y(t)$ vérifie un **système d'équations de renouvellement markovien** :

$$\forall y \in \mathcal{M} \quad f(y, t) = g(y, t) + \int_{\mathbb{F} \times [0, t]} f(z, t - s) N(y, dz, ds)$$

Plan

Introduction

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

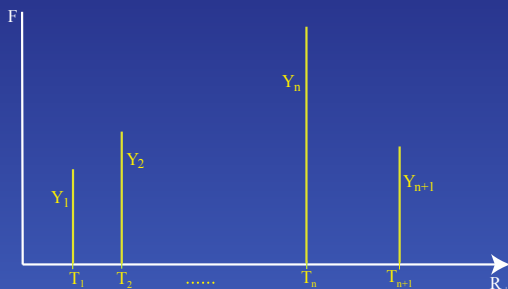
Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus pilotés

Définition

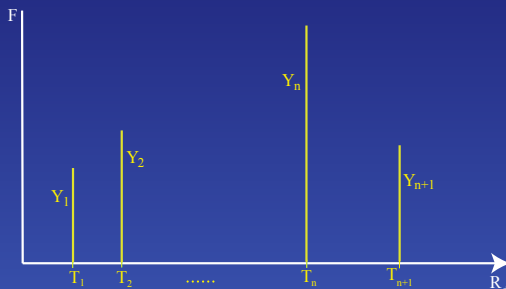
Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de v.a. positives.

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans F .



$(Y_n, T_n)_{n \geq 1}$ est un **processus de renouvellement markovien de noyau de renouvellement markovien N** si pour tout $n \geq 1$, la loi de $(Y_{n+1}, T_{n+1} - T_n)$ connaissant $(Y_1, T_1, \dots, Y_n, T_n)$ ne dépend que de Y_n .

Notations



$$N(y, dz, dv) = dF_y(v) \beta(y, v; dz)$$

$N(y, dz, dv)$: loi de $(Y_{n+1}, T_{n+1} - T_n)$ sachant $\{Y_n = y\}$

dF_y : loi de $T_{n+1} - T_n$ sachant $\{Y_n = y\}$

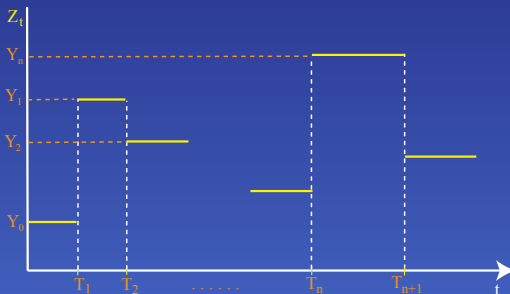
$\beta(y, v; dz)$: loi de Y_{n+1} sachant $\{Y_n = y, T_{n+1} - T_n = v\}$.

Renouvellement markovien et processus semi-markovien

Processus semi-markovien $(Z_t)_{t \geq 0}$

(Y, T) : processus de renouvellement markovien de noyau N

$$Z_t = Y_n \text{ pour } T_n \leq t < T_{n+1},$$



Processus semi-markovien et processus markovien de sauts

Processus semi-markovien $(Z_t)_{t \geq 0}$

(Y, T) : processus de renouvellement markovien de noyau N

$$Z_t = Y_n \text{ pour } T_n \leq t < T_{n+1},$$

$$N(y, dz, dv) = dF_y(v) \beta(y, v; dz)$$

Processus markovien de sauts

- à espace d'états discret

$$dF_i(v) = a(i) e^{-a(i)v} dv, \quad \beta(i, v; j) = Q(i, j)$$

- à espace d'états quelconque

$$dF_y(v) = a(y) e^{-a(y)v} dv, \quad \beta(y, v; dz) = Q(y, dz).$$

Renouvellement markovien et modèles d'âge virtuel

Les modèles d'âge virtuel (Olivier Gaudoin, Laurent Doyen) engendrent un processus de renouvellement markovien

- T_n : instants de réparation (= de panne) du matériel,
- Y_n : âge virtuel du matériel à l'instant T_n .

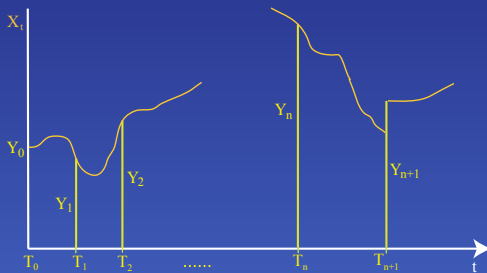
$$dF_y(v) = b(y+v) e^{-\int_0^v b(y+s) ds} dv,$$

$$\beta(y, v; dz) =$$

- $\delta_0(dz)$ pour le modèle AGAN,
- $\delta_{y+v}(dz)$ pour le modèle ABAO,
- $p \delta_0(dz) + (1-p) \delta_{y+v}(dz)$ pour le modèle BP,
- $\delta_{y+(1-\rho)v}(dz)$ pour le modèle ARA_1 ,
- $\delta_{(1-\rho)(y+v)}(dz)$ pour le modèle ARA_∞ .

Semi-régénération

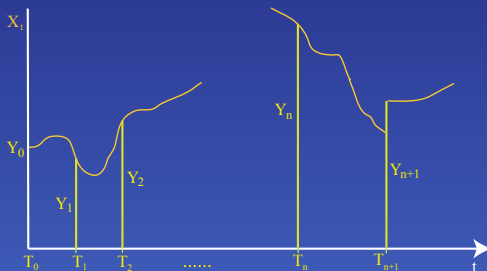
Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est **semi-régénératif** s'il existe un processus de renouvellement markovien (Y, T) , tel que, pour tout $n \geq 0$, la loi de $(T_{n+p} - T_n)_{p \geq 1}, (X_{t+T_n})_{t \geq 0}$ sachant $(Y_0, Y_1, T_1, \dots, Y_n, T_n)$ ne dépend que de Y_n .



sur le dessin, $Y_n = X_{T_n}$, c'est souvent le cas mais ce n'est pas nécessaire

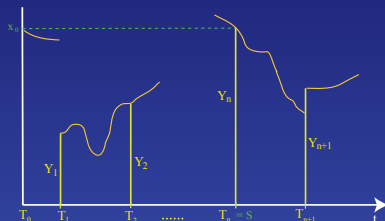
Semi-régénération

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est **semi-régénératif** s'il existe un processus de renouvellement markovien (Y, T) , tel que, pour tout $n \geq 0$, la loi de $(T_{n+p} - T_n)_{p \geq 1}, (X_{t+T_n})_{t \geq 0}$ sachant $(Y_0, Y_1, T_1, \dots, Y_n, T_n)$ ne dépend que de Y_n .



Si la chaîne de Markov Y admet un point récurrent x_0 , le processus est régénératif.

Semi-régénération



Si la chaîne de Markov Y admet un point récurrent x_0 , on pose $S = T_\nu$, où $\nu = \inf\{n \geq 1 : Y_n = x_0\}$. Si la loi de S est étalée, si h est bornée et si $\mathbb{E}_{x_0}(S) < +\infty$, le théorème de renouvellement donne :

$$\mathbb{E}(h(X_t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}_{x_0}(S)} \mathbb{E}_{x_0} \left(\int_0^S h(X_u) du \right)$$

et on montre que :

$$\frac{1}{\mathbb{E}_{x_0}(S)} \mathbb{E}_{x_0} \left(\int_0^S h(X_u) du \right) = \frac{1}{\text{"}\mathbb{E}_\nu\text{"}(T_1)} \text{"}\mathbb{E}_\nu\text{"} \left(\int_0^{T_1} h(X_u) du \right)$$

où ν est la mesure stationnaire de la chaîne de Markov Y .

Application

On note T_n les instants successifs de remise en fonctionnement d'un matériel et on pose $Y_n = X_{T_n}$.

On suppose que le processus X décrivant l'évolution du matériel est semi-régénératif avec (Y, T) comme processus de renouvellement markovien associé et qu'il vérifie les hypothèses précédentes, alors :

$$D(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}_\nu(T_1)} \mathbb{E}_\nu \left(\int_0^{T_1} 1_{\mathcal{M}}(X_u) du \right).$$

Application

On note T_n les instants successifs de remise en fonctionnement d'un matériel et on pose $Y_n = X_{T_n}$.

On suppose que le processus X décrivant l'évolution du matériel est semi-régénératif avec (Y, T) comme processus de renouvellement markovien associé et qu'il vérifie les hypothèses précédentes, alors :

$$D(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}_\nu(T_1)} \mathbb{E}_\nu \left(\int_0^{T_1} 1_{\mathcal{M}}(X_u) du \right).$$

Si la chaîne Y est récurrente positive et apériodique et si les fonctions $x \rightarrow \mathbb{E}_x(T_1)$ et $x \rightarrow \mathbb{E}_x(\int_0^{T_1} 1_{\mathcal{M}}(X_s) ds)$ sont continues et bornées, on a :

$$\mathbb{E}_\nu(T_1) = \text{MTBF}, \quad \mathbb{E}_\nu \left(\int_0^{T_1} 1_{\mathcal{M}}(X_s) ds \right) = \text{MUT},$$

d'où le résultat.

Semi-régénération

En fiabilité, lorsque les taux de défaillance et de réparation ne sont pas constants, et qu'il n'y a pas de maintenances (préventives) remettant à neuf le matériel dans son ensemble, pour avoir un processus semi-régénératif, il faut ajouter des variables complémentaires à valeurs dans \mathbb{R}_+ : le temps passé par chaque composant dans son état courant. La chaîne Y est à valeurs dans un espace non dénombrable et il n'y a pas de point récurrent.

A-t-on

$$\mathbb{E}(h(X_t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}_\nu(T_1)} \mathbb{E}_\nu \left(\int_0^{T_1} h(X_u) du \right)$$

si la chaîne de Markov Y est seulement Harris-récurrente ?

Equations de renouvellement markovien

Lorsque le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est semi-régénératif

$$f(x, t) = \mathbb{E}_x(h(X_t))$$

vérifie le système d'équations de renouvellement markovien :

$$\forall x \in F, \quad f(x, t) = g(x, t) + \int_{F \times \mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{[0, t]}(s) f(y, t - s) N(x, dy, ds)$$

Les équations de renouvellement markovien sont une généralisation des équations de renouvellement

$$f(t) = g(t) + \int \mathbf{1}_{[0, t]}(s) f(t - s) \mu(ds)$$

Sous de bonnes hypothèses, le théorème de renouvellement donne :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} g(s) ds, \quad m = \int s \mu(ds)$$

A-t-on des résultats analogues pour la solution d'un système d'équations de renouvellement markovien ?

Equations de renouvellement markovien

- Equation de renouvellement

$$f(t) = g(t) + \int 1_{[0,t]}(s) f(t-s) \mu(ds)$$

Sous de bonnes hypothèses

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} g(s) ds, \quad m = \int s \mu(ds)$$

- Equations de renouvellement markovien

$$f(x, t) = g(x, t) + \int 1_{[0,t]}(s) f(y, t-s) N(x, dy, ds)$$

Sous des hypothèses à préciser :

$$f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}_\nu(T_1)} \int_F \int_0^{+\infty} g(x, s) \nu(dx) ds$$

(Y_n, T_n) processus de renouvellement markovien de noyau N , ν mesure stationnaire de la chaîne de Markov Y .

Vaste littérature pour préciser les hypothèses ...

Equations de renouvellement markovien

J. Jacod, (1971 et 1974) *Ann. IHP*

H. Kesten, (1974) *Ann. Prob.*

D. McDonad, (1978) *Ann. Prob*

E. Nummelin, (1978) *Ann. IHP*

E. Arjas, E. Nummelin, R.L. Tweedie, (1978) *J. Appl. Prob.*

K.B. Athreya, D. McDonad, P. Ney, (1978) *Ann. Prob.*

K.B. Athreya, P. Ney, (1978) *Bull. Austral. Math. Soc.*

V.M. Shurenkov, (1984) *Theor. Prob. Appl.*

S. Niemi, E. Nummelin, (1986) *Stoch. Proc. Appl.*

G. Alsmeyer, (1994) *Stoch. Proc. Appl.*

G. Alsmeyer, (1998) *Markov Proc. Rel. Fields*

- *Le plus souvent on a une convergence ν -presque partout.*
- *Les hypothèses sont compliquées à vérifier en pratique.*
- *Il y a toujours de manière plus ou moins explicite l'hypothèse que la chaîne Y est Harris-récurrente.*

Equations de renouvellement markovien

On a réussi à vérifier des hypothèses qui permettent de montrer rigoureusement que :

$$D(\infty) = \frac{MUT}{MTBF}$$

sous des conditions qui sont satisfaites notamment pour un système formé de composants en interaction par **mode commun**, **redondance passive**, **nombre limité de réparateurs**, lorsque les taux sont bornés et ne tendent pas vers 0 à l'infini.

C. COCOZZA–THIVENT et M. ROUSSIGNOL. A general framework for some asymptotic reliability formulas. *Adv. Appl. Prob* **32**, 446-467 2000.

Equations de renouvellement markovien

Nous avons utilisé ces techniques dans plusieurs autres travaux en sûreté de fonctionnement et dans des problèmes d'optimisation de maintenance préventive.

En général les maintenances préventives facilitent les choses : existence d'un état de régénération.

Equations de renouvellement markovien

Nous avons utilisé ces techniques dans plusieurs autres travaux en sûreté de fonctionnement et dans des problèmes d'optimisation de maintenance préventive.

En général les maintenances préventives facilitent les choses : existence d'un état de régénération.

Lorsqu'il n'y a pas d'état de régénération, la vérification rigoureuse des hypothèses est une galère.

Pour les applications industrielles effectives, on peut faire jouer l'intime conviction. Pour publier un article dans une revue mathématique : non ...

Lorsqu'on arrive à vérifier les hypothèses, l'énergie dépensée en valait-elle la peine ?

Plan

Introduction

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus pilotés

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

PDMP : Piecewise Deterministic Markov Process

Le pionnier pour l'introduction de processus hybrides et de modèles de type PDMP dans des problèmes de sûreté de fonctionnement est JACQUES DEVOOGHT, Université Libre de Bruxelles, Service de Métrologie Nucléaire.

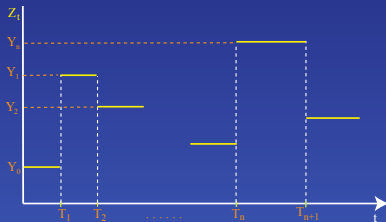
M.H.A. DAVIS a été le premier à donner une formalisation mathématique des PDMP (avec notamment des exemples en assurance) et à les étudier.

M.H.A. DAVIS. *Markov Models and Optimization*. Monographs on Statistics and Applied Probability 49, Chapman & Hall, 1993.

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Les PDMP généralisent les processus semi-markoviens.

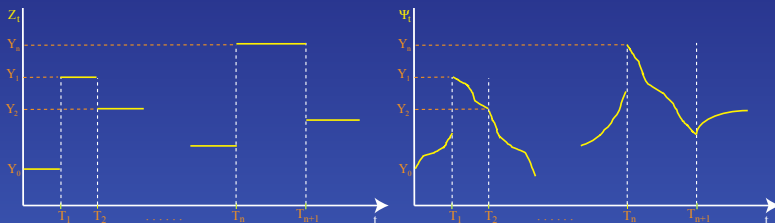
Un processus semi-markovien est constant entre les instants T_n ,



Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Les PDMP généralisent les processus semi-markoviens.

Un processus semi-markovien est constant entre les instants T_n ,

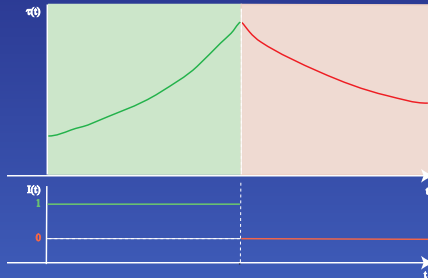


un PDMP est déterministe entre les instants T_n

avec des conditions liant le noyau du processus de renouvellement markovien et le processus déterministe pour avoir une bonne interprétation.

Premier exemple de PDMP hybride

- Le taux de défaillance d'un composant dépend de sa température.
- La température du composant a une cinétique différente lorsque le composant est en marche ou en panne.



- Le taux de réparation du composant dépend du temps.

Premier exemple de PDMP hybride

Le PDMP est $\Phi_t = (I(t), \tau(t), A(t))$,

$A(t)$: durée écoulée depuis le dernier changement d'état du composant

Pour Davis les processus déterministes sont solutions de systèmes d'équations différentielles, c'est-à-dire ici :

- si le composant est en marche $\tau'(t) = v_1(\tau(t))$, $I'(t) = 0$, $A'(t) = 1$,
- si le composant est en panne $\tau'(t) = v_0(\tau(t))$, $I'(t) = 0$, $A'(t) = 1$.

Premier exemple de PDMP hybride

En fait :

- $A(t)$ est inutile si le composant est en marche,
- $\tau(t)$ est nécessaire lorsque le composant est en panne pour connaître sa température à la fin de la réparation.

On peut donc prendre :

$$\Phi_t = \begin{cases} (I(t), \tau(t)) & \text{si } I(t) = 1, \\ (I(t), \tau(t), A(t)) & \text{si } I(t) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$F = \{1\} \times \mathbb{R} \cup \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

cas particulier de $F = \cup_{i \in E} \{i\} \times F_i$ E discret, habituels en fiabilité dynamique.

Deuxième exemple de PDMP hybride

Un circuit hydraulique est alimenté par une pompe et un réservoir de secours.

Normalement le réservoir est plein et la pompe fonctionne en assurant le débit demandé (débit nominal).

Lorsque la pompe tombe en panne, le circuit est alimenté par le réservoir tant qu'il n'est pas vide.

Lorsque la pompe est réparée, elle fournit un débit supérieur au débit nominal tant que le réservoir n'est pas plein.

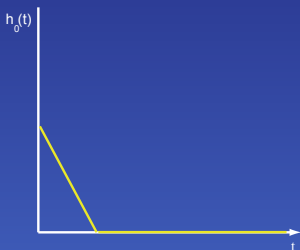
Les taux de défaillance et de réparation de la pompe ne sont pas constants.

L'événement indésirable est l'absence de distribution d'eau, c'est-à-dire le réservoir vide.

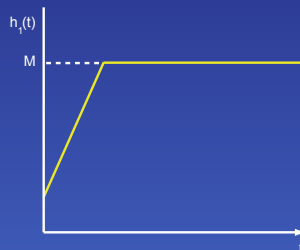
Deuxième exemple de PDMP hybride

Le PDMP est $\Phi_t = (I(t), H(t), A(t))$.

La hauteur d'eau dans le réservoir ne satisfait pas une équation différentielle à cause des discontinuités dans la dérivée.



pompe en panne



pompe en marche

Deuxième exemple de PDMP hybride

Jacobsen suppose seulement que l'évolution déterministe ϕ vérifie

$$\phi(y, 0) = y, \quad \phi(y, s + t) = \phi(\phi(y, s), t)$$

M. JACOBSEN. *Point Process Theory and Applications, Marked Point and Piecewise Deterministic Processes*. Birkhäuser, 2006.

Ce cadre est à la fois plus et moins général que celui de Davis car Davis introduit des frontières et pas Jacobsen.

Deuxième exemple de PDMP hybride

Jacobsen suppose seulement que l'évolution déterministe ϕ vérifie

$$\phi(y, 0) = y, \quad \phi(y, s + t) = \phi(\phi(y, s), t)$$

M. JACOBSEN. *Point Process Theory and Applications, Marked Point and Piecewise Deterministic Processes*. Birkhäuser, 2006.

Ce cadre est à la fois plus et moins général que celui de Davis car Davis introduit des frontières et pas Jacobsen.

En fait dans cet exemple on peut se ramener à la modélisation de Davis en introduisant des frontières.

Mais les frontières créent en général des difficultés techniques.

Par contre dans certains exemples on ne peut se passer de l'introduction de frontières.

Troisième exemple de PDMP hybride

Un circuit hydraulique est alimenté par un réservoir.
Une pompe alimente le réservoir.

La pompe démarre (si elle n'est pas en panne !) seulement lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{\min} .

La pompe s'arrête lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{\max} .

La pompe a un taux de défaillance fonction de son âge et un taux de réparation dépendant du temps.

Lorsque la pompe est à l'arrêt, elle ne vieillit pas.

Troisième exemple de PDMP hybride

Un circuit hydraulique est alimenté par un réservoir.
Une pompe alimente le réservoir.

La pompe démarre (si elle n'est pas en panne !) seulement lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{\min} .

La pompe s'arrête lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{\max} .

La pompe a un taux de défaillance fonction de son âge et un taux de réparation dépendant du temps.

Lorsque la pompe est à l'arrêt, elle ne vieillit pas.

Il faut donc bien distinguer les états "arrêt" et "marche", ce qui nécessite l'introduction de frontières.

Troisième exemple de PDMP hybride

Un circuit hydraulique est alimenté par un réservoir.
Une pompe alimente le réservoir.

La pompe démarre (si elle n'est pas en panne !) seulement lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{\min} .

La transition "pompe à l'arrêt \rightarrow pompe en marche" est déclenchée par l'atteinte du niveau h_{\min} .

La pompe s'arrête lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{\max} .

La transition "pompe en marche \rightarrow pompe à l'arrêt" est déclenchée par l'atteinte du niveau h_{\max} .

La pompe a un taux de défaillance fonction de son âge et un taux de réparation dépendant du temps.

Lorsque la pompe est à l'arrêt, elle ne vieillit pas.

Il faut donc bien distinguer les états "arrêt" et "marche", ce qui nécessite l'introduction de frontières.

Quatrième exemple de PDMP hybride

Matériel formé de composants de **taux** de défaillance et de réparation **non constants**, en interaction :

- redondance passive,
- mode commun de défaillance,
- nombre limité de réparateurs.

Quatrième exemple de PDMP hybride

Matériel formé de composants de **taux** de défaillance et de réparation **non constants**, en interaction :

- redondance passive,
- mode commun de défaillance,
- nombre limité de réparateurs.

Au lieu d'avoir des taux (de réparation), on peut avoir des **durées** (de réparation) **constantes**.

Quatrième exemple de PDMP hybride

Matériel formé de composants de **taux** de défaillance et de réparation **non constants**, en interaction :

- redondance passive,
- mode commun de défaillance,
- nombre limité de réparateurs.

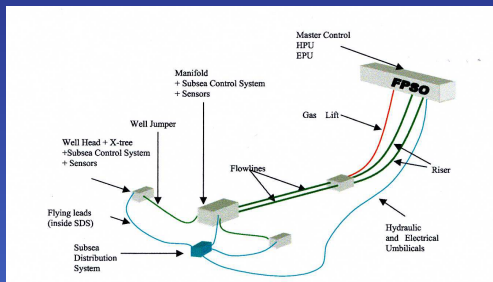
Au lieu d'avoir des taux (de réparation), on peut avoir des **durées** (de réparation) **constantes**.

On peut avoir des maintenances préventives, par exemple "selon l'âge".

Cinquième exemple de PDMP hybride

Un système de production pétrolière offshore

F. DUFOUR, Y. DUTUIT, C. ELEGBEDE, H. ZHANG. Application des processus déterministes par morceaux à un système de production offshore. *Congrès $\lambda - \mu$ 16, Avignon 2008.*



16 composants de taux de défaillance et de réparation constants

Cinquième exemple de PDMP hybride

- Les composants de surface sont immédiatement réparables
- La réparation des composants sous-marins nécessite un **robot réparateur** :
 - ▶ son déplacement sur site prend une journée
 - ▶ il n'y a qu'un robot et pas de priorité
- **Formation de bouchons d'hydrates** qui induisent une probabilité de non redémarrage après un arrêt du système. Cette probabilité dépend :
 - ▶ du démarrage ou non d'une pompe à méthanol
 - ▶ de la durée de l'arrêt
- **Formation de dépôts de paraffine** qui entraînent une diminution du débit de production :
 - ▶ passage dans la conduite, à intervalles réguliers, d'un outil qui racle les dépôts
 - ▶ l'outil peut rester coïncé

Calcul de la quantité moyenne d'hydrocarbures produite en 20 ans.

Quantification des PDMP

Les calculs peuvent se faire

- par simulations de Monte-Carlo

- par algorithmes numériques déterministes

Quantification des PDMP

Les calculs peuvent se faire

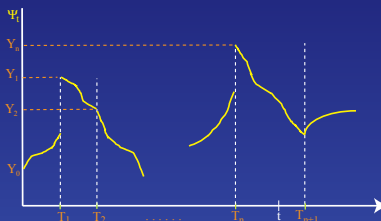
- par simulations de Monte-Carlo
 - ▶ avec des réseaux de Petri stochastiques : introduction de discrétisations,
 - ▶ directement à partir de la description mathématique du PDMP (équipe CQFD de l'INRIA de Bordeaux).
- par algorithmes numériques déterministes

Quantification des PDMP

Les calculs peuvent se faire

- **par simulations de Monte-Carlo**
 - ▶ avec des réseaux de Petri stochastiques : introduction de discrétisations,
 - ▶ directement à partir de la description mathématique du PDMP (équipe CQFD de l'INRIA de Bordeaux).
- **par algorithmes numériques déterministes**
 - ▶ pour le calcul des lois marginales, dans le cas sans frontière, par des méthodes de volumes finis à partir des équations de Dynkin : “système d’e.d.p. couplées pour des mesures” à l’UPE-MLV, R. EYMARD avec C. COCOZZA, S. MERCIER, A. PRIGNET.
 - ▶ par discrétisation du processus pour obtenir une chaîne de Markov à espace d’états finis ou un processus markovien de sauts.

Construction d'un PDMP



- Les évolutions déterministes sont décrites par $\phi : F \times \mathbb{R}_+ \rightarrow F$

$$\phi(y, t + s) = \phi(\phi(y, t), s), \quad \phi(y, 0) = y$$

- Le PDMP est défini par :

$$\Phi_t = \phi(Y_n, t - T_n) \quad \text{si } T_n \leq t < T_{n+1}.$$

- $(Y_n, T_n)_{n \geq 1}$ est un processus de renouvellement markovien à valeurs dans F de noyau de renouvellement markovien N .

Construction d'un PDMP

$$N(y, dz, dv) = dF_y(v) \beta(y, v; dz)$$

dF_y : loi de $T_{n+1} - T_n$ sachant $Y_n = y$,

$\beta(y, v; dz)$: loi de Y_{n+1} sachant $Y_n = y, T_{n+1} - T_n = z$

- $\beta(y, v; dz) = Q(\phi(y, v); dz)$.
- dans le cas sans frontière, $dF_y(v)$ a une densité de taux $\lambda(y, v) = b(\phi(y, v))$,

$$\mathbb{P}(\text{"saut" dans } (t, t + \Delta) / \Phi_t = z) = b(z) \Delta + o(\Delta)$$

Construction d'un PDMP

$$N(y, dz, dv) = dF_y(v) \beta(y, v; dz)$$

dF_y : loi de $T_{n+1} - T_n$ sachant $Y_n = y$,

$\beta(y, v; dz)$: loi de Y_{n+1} sachant $Y_n = y, T_{n+1} - T_n = z$

- $\beta(y, v; dz) = Q(\phi(y, v); dz)$.
- dans le cas sans frontière, $dF_y(v)$ a une densité de taux $\lambda(y, v) = b(\phi(y, v))$,

$$\mathbb{P}(\text{"saut" dans } (t, t + \Delta) / \Phi_t = z) = b(z) \Delta + o(\Delta)$$

- dans le cas avec frontière, dF_y est la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$
 - ▶ S_y v.a. de taux de hasard $\lambda(y, v) = b(\phi(y, v))$
 - ▶ $\alpha(y) = \inf\{t : \phi(y, t) \in \Gamma\}$ Γ est la "frontière"
- plus généralement $\alpha(\phi(y, u)) = \alpha(y) - u$

Remarque sur les modèles d'âge virtuel

Dans les modèles d'âge virtuel (Olivier Gaudoin, Laurent Doyen) :

$$\phi(y, v) = y + v, \quad \lambda(y, v) = b(\phi(y, v))$$

- pour le modèle *AGAN*

$$\beta(y, v; dz) = \delta_0(dz) = Q(\phi(y, v))$$

- pour le modèle *ABAO*

$$\beta(y, v; dz) = \delta_{y+v}(dz) = Q(\phi(y, v))$$

- pour le modèle *BP*

$$\beta(y, v; dz) = p \delta_0(dz) + (1 - p) \delta_{y+v}(dz) = Q(\phi(y, v))$$

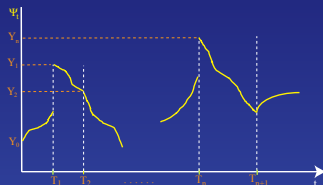
- pour le modèle *ARA₁*

$$\beta(y, v; dz) = \delta_{y+(1-\rho)v}(dz) \quad \text{pas PDMP}$$

- pour le modèle *ARA_∞*

$$\beta(y, v; dz) = \delta_{(1-\rho)(y+v)}(dz) = Q(\phi(y, v))$$

PDMP et processus semi-markovien complété



$$\begin{aligned}\Phi_t &= \phi(Y_n, t - T_n) \quad \text{si } T_n \leq t < T_{n+1} \\ &= \phi(Z_t, A_t)\end{aligned}$$

Z_t : processus semi-markovien

$$Z_t = Y_n \quad \text{si } T_n \leq t < T_{n+1}$$

A_t : durée écoulée depuis le dernier "saut"

$$A_t = t - T_n \quad \text{si } T_n \leq t < T_{n+1}$$

(Z_t, A_t) processus semi-markovien complété

$$\mathbb{E}(\psi(\Phi_t)) = \mathbb{E}((\psi \circ \phi)(Z_t, A_t)).$$

PDMP et CSMP

On est passé

des PDMP aux CSMP

qui sont des PDMP particuliers dans lesquels l'évolution déterministe est très simple (linéaire).

Cela permet d'avoir une séparation entre :

- les difficultés liées à la structure de type renouvellement markovien,
- les difficultés liées à l'évolution déterministe.

Plan

Introduction

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

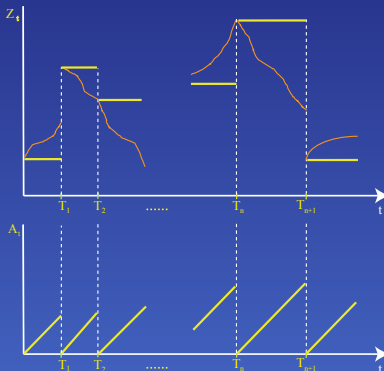
Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus pilotés

Processus Semi-Markovien complété (CSMP)

CSMP : **C**omplemented **S**emi **M**arkov **P**rocess

Z_t : processus semi-markovien, A_t : durée écoulée depuis le dernier T_n ,
 (Z_t, A_t) processus semi-markovien complété



Le CSMP est un processus de Markov.

CSMP : pourquoi se limiter à la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$?

Soit dF_y la loi de $T_{n+1} - T_n$ sachant $\{Y_n = y\}$.

Dans les PDMP introduits par Davis, dF_y est la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$:

$$\begin{aligned} dF_y(t) &= \lambda_y(t) e^{-\int_0^t \lambda_y(s) ds} \mathbf{1}_{\{t < \alpha(y)\}} dt + e^{-\int_0^{\alpha(y)} \lambda_y(s) ds} \delta_{\alpha(y)}(dt) \\ &= f_y(t) \mathbf{1}_{\{t < \alpha(y)\}} dt + \bar{F}_y(\alpha(y)) \delta_{\alpha(y)}(dt). \end{aligned}$$

Pourquoi ne pas prendre, plus généralement

$$dF_y(t) = q_0(y) h_y(t) dt + \sum_{k=1}^{M(y)} q_k(y) \delta_{\alpha_k(y)}(dt) ?$$

CSMP : pourquoi se limiter à la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$?

Soit dF_y la loi de $T_{n+1} - T_n$ sachant $\{Y_n = y\}$.

Dans les PDMP introduits par Davis, dF_y est la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$:

$$\begin{aligned} dF_y(t) &= \lambda_y(t) e^{-\int_0^t \lambda_y(s) ds} \mathbf{1}_{\{t < \alpha(y)\}} dt + e^{-\int_0^{\alpha(y)} \lambda_y(s) ds} \delta_{\alpha(y)}(dt) \\ &= f_y(t) \mathbf{1}_{\{t < \alpha(y)\}} dt + \bar{F}_y(\alpha(y)) \delta_{\alpha(y)}(dt). \end{aligned}$$

Pourquoi ne pas prendre, plus généralement

$$dF_y(t) = q_0(y) h_y(t) dt + \sum_{k=1}^{M(y)} q_k(y) \delta_{\alpha_k(y)}(dt) ?$$

parce que **les formules sont épouvantables** lorsqu'on écrit le compensateur du processus ponctuel marqué $(Y_n, T_n)_{n \geq 1}$, et par suite la représentation d'Ito et le générateur du CSMP et du PDMP. **Mais**

CSMP : pourquoi se limiter à la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$?

Un matériel a une durée de vie "intrinsèque" de loi de densité f .

Une fusée

A des instants α_i ($1 \leq i \leq M$), le matériel subit des sollicitations particulières qui peuvent entraîner sa défaillance immédiate.

largue ses étages

La probabilité que la $i^{\text{ème}}$ sollicitation entraîne la défaillance immédiate est p_i .

CSMP : pourquoi se limiter à la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$?

Un matériel a une durée de vie "intrinsèque" de loi de densité f .

Une fusée

A des instants α_i ($1 \leq i \leq M$), le matériel subit des sollicitations particulières qui peuvent entraîner sa défaillance immédiate.

largue ses étages

La probabilité que la $i^{\text{ème}}$ sollicitation entraîne la défaillance immédiate est p_i .

La loi de la durée de fonctionnement du matériel est :

$$\begin{aligned}
 dF(t) = & \left(\mathbf{1}_{\{t < \alpha_1\}} + \sum_{i=2}^M (1 - p_1) \cdots (1 - p_{i-1}) \mathbf{1}_{\{\alpha_{i-1} < t < \alpha_i\}} \right. \\
 & \left. + (1 - p_1) \cdots (1 - p_M) \mathbf{1}_{\{t > \alpha_M\}} \right) f(t) dt + p_1 \bar{F}(\alpha_1) \delta_{\alpha_1}(dt) \\
 & + \sum_{i=2}^M (1 - p_1) \cdots (1 - p_{i-1}) p_i \bar{F}(\alpha_i) \delta_{\alpha_i}(dt).
 \end{aligned}$$

CSMP : pourquoi se limiter à la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$?

Avec une loi de la forme

$$dF(t) = \left(\mathbf{1}_{\{t < \alpha_1\}} + \sum_{i=2}^M (1 - p_1) \cdots (1 - p_{i-1}) \mathbf{1}_{\{\alpha_{i-1} < t < \alpha_i\}} \right. \\ \left. + (1 - p_1) \cdots (1 - p_M) \mathbf{1}_{\{t > \alpha_M\}} \right) f(t) dt + p_1 \bar{F}(\alpha_1) \delta_{\alpha_1}(dt) \\ + \sum_{i=2}^M (1 - p_1) \cdots (1 - p_{i-1}) p_i \bar{F}(\alpha_i) \delta_{\alpha_i}(dt)$$

les formules sont sympathiques.

Le compensateur de $\mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$ est :

$$\int_{[0,t]} \mathbf{1}_{[0,T]}(s) \frac{dF_y(s)}{dF_y([s, +\infty[)} = \int_{[0,t]} \mathbf{1}_{[0,T]}(s) \left(\lambda(s) ds + \sum_{i=1}^M p_i \delta_{\alpha_i}(ds) \right)$$

avec λ taux de hasard de f .

CSMP : pourquoi se limiter à la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$?

Avec une loi de la forme

$$dF(t) = \left(\mathbf{1}_{\{t < \alpha_1\}} + \sum_{i=2}^M (1 - p_1) \cdots (1 - p_{i-1}) \mathbf{1}_{\{\alpha_{i-1} < t < \alpha_i\}} \right. \\ \left. + (1 - p_1) \cdots (1 - p_M) \mathbf{1}_{\{t > \alpha_M\}} \right) f(t) dt + p_1 \bar{F}(\alpha_1) \delta_{\alpha_1}(dt) \\ + \sum_{i=2}^M (1 - p_1) \cdots (1 - p_{i-1}) p_i \bar{F}(\alpha_i) \delta_{\alpha_i}(dt)$$

les formules sont sympathiques.

Le compensateur de $\mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$ est :

$$\int_{[0,t]} \mathbf{1}_{[0,T]}(s) \frac{dF_y(s)}{dF_y([s, +\infty[)} = \int_{[0,t]} \mathbf{1}_{[0,T]}(s) \left(\lambda(s) ds + \sum_{i=1}^M p_i \delta_{\alpha_i}(ds) \right)$$

avec λ taux de hasard de f .

Toute loi mélange d'une loi à densité et d'un nombre fini de masses de Dirac peut se mettre sous la forme ci-dessus.

CSMP : pourquoi se limiter à la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$?

Supposer que dF_y a la forme précédente ne présente pas plus de difficultés théoriques que supposer que dF_y est la loi du minimum d'une v.a. à densité et d'une constante.

C'est la présence de masses de Dirac dans dF_y qui crée des problèmes.

CSMP avec durées absolument continues

On considère le CSMP associé au processus de renouvellement markovien de noyau $N(y, dz, dv) = dF_y(v) \beta(y, v; dz)$ avec

$$dF_y(v) = f_y(v) dv$$

et soit $\lambda(y, \cdot)$ le taux de hasard de f_y .

Soit P_t le semi-groupe du CSMP :

$$(P_t \varphi)(y, u) = \mathbb{E}_{y,u}(\varphi(Z_t, A_t)).$$

Soit \mathcal{D}_0 l'ensemble des $\varphi : F \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour $z \in F$, $v \mapsto \varphi(z, v)$ soit absolument continue et telles que φ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ soient bornées sur $F \times [0, a]$ pour tout a .

CSMP avec durées absolument continues

Pour $\varphi \in \mathcal{D}_0$, on pose :

$$(L\varphi)(y, u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(y, u) + \int_F (\varphi(z, 0) - \varphi(y, u)) \lambda(y, u) \beta(y, u; dz).$$

On a :

$$(P_t \varphi)(y, u) = \varphi(y, u) + \int_0^t (P_s L\varphi)(y, u) ds$$

(équation avant de Chapman-Kolmogorov)

et pour tout $y \in F$, on a pour presque tout u :

$$(P_t L\varphi)(y, u) = (LP_t \varphi)(y, u)$$

(équation arrière de Chapman-Kolmogorov)

Si $v \rightarrow \varphi(z, v)$ est de classe C^1 et sous des hypothèses de continuité de λ et β , on peut enlever les presque partout.

Application aux PDMP avec durées absolument continues

Soit $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ un PDMP à valeurs dans F de caractéristiques ϕ, b, Q et de semi-groupe \mathcal{P}_t . Soit $\psi : F \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\psi \circ \phi : F \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ appartienne à \mathcal{D}_0 . Alors :

$$(\mathcal{P}_t \psi)(y) = \psi(y) + \int_0^t (P_s \mathcal{L} \psi)(y) ds \quad (\text{équation avant})$$

avec $(\mathcal{L} \psi)(y) = (\chi_\phi \psi)(y) + \int_F (\psi(z) - \psi(y)) b(y) Q(y, dz)$,

$(\chi_\phi \psi)(y) = \frac{\partial \psi \circ \phi}{\partial v}(y, 0)$ lorsque la dérivée existe et 0 sinon.

Application aux PDMP avec durées absolument continues

Soit $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ un PDMP à valeurs dans F de caractéristiques ϕ, b, Q et de semi-groupe \mathcal{P}_t . Soit $\psi : F \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\psi \circ \phi : F \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ appartienne à \mathcal{D}_0 . Alors :

$$(\mathcal{P}_t \psi)(y) = \psi(y) + \int_0^t (P_s \mathcal{L} \psi)(y) ds \quad (\text{équation avant})$$

avec $(\mathcal{L} \psi)(y) = (\chi_\phi \psi)(y) + \int_F (\psi(z) - \psi(y)) b(y) Q(y, dz)$,

$(\chi_\phi \psi)(y) = \frac{\partial \psi \circ \phi}{\partial v}(y, 0)$ lorsque la dérivée existe et 0 sinon.

Soit $y \in F$, pour presque tout u on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{P}_t \psi)(g(y, u)) = (\mathcal{L} \mathcal{P}_t \psi)(g(y, u)) \quad (\text{équation arrière})$$

On retrouve les résultats de Jacobsen sur la caractérisation des probabilités stationnaires π par $\pi \mathcal{L} \psi = 0$, avec ψ dans une classe raisonnable.

CSMP : ennuis créés par les masses de Dirac

Lorsqu'il y a des masses de Dirac, $t \rightarrow (P_t\varphi)(y, u)$ n'est en général pas continue.

Pour avoir $P_t\varphi = \varphi + \int_0^t P_s L\varphi ds$, il faut imposer une condition. Par exemple dans le cas classique d'un CSMP "simple", i.e. dF_y est la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$, elle s'écrit :

$$\text{lorsque } \alpha(y) < +\infty : \quad \varphi(y, \alpha(y)) = \int_F \varphi(z, 0) \beta(y, \alpha(y); dz).$$

En outre, dans le cas d'un CSMP "simple" et pour de telles fonctions φ , étant donné $y \in F$, on a pour presque tout $u < \alpha(y)$: $(P_t L\varphi)(y, u) = (LP_t\varphi)(y, u)$.

Mais la classe de fonctions vérifiant cette condition est trop peu manipulable pour pouvoir travailler avec ...

CSMP : ennuis créés par les masses de Dirac

En fait la fonction $t \rightarrow (P_t\varphi)(y, u)$ est à variations bornées :

$$(P_t\varphi)(y, u) = \varphi(y, u) + \int_{[0, t]} (D_1^{y, u}\varphi)(dv)$$

CSMP : ennuis créés par les masses de Dirac

En fait la fonction $t \rightarrow (P_t \varphi)(y, u)$ est à variations bornées :

$$(P_t \varphi)(y, u) = \varphi(y, u) + \int_{[0, t]} (D_1^{y, u} \varphi)(dv)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} h(v) (D_1^{y, u} \varphi)(dv) &= \int_{\mathbb{R}_+} h(v) (P_v L \varphi)(y, u) dv \\ &+ \int_{F \times \mathbb{R}_+} h(v) (\varphi(z, 0) - \varphi(y, u + v)) n_0^{y, u}(dz, dv) \\ &+ \int_{(F \times \mathbb{R}_+)^2} h(v + v_1) (\varphi(z_1, 0) - \varphi(z, v_1)) n(z, dz_1, dv_1) \rho^{y, u}(dz, dv). \end{aligned}$$

n : partie contenant les masses de Dirac du noyau N ,

$\rho^{y, u} = (\rho_c^{y, u} + n_0^{y, u}) * \sum_{k \geq 0} n^{*k}$: intensité du processus de renouvellement markovien,

$$\rho_c^{y, u}(dz, dv) = \mathbb{E}_{y, u}(\lambda(Z_v, A_v) \beta(Z_v, A_v; dz)) dv.$$

CSMP : ennuis créés par les masses de Dirac

Les fonctions $t \rightarrow (P_t\varphi)(y, u)$ et $u \rightarrow (P_t\varphi)(y, u)$ sont à variations bornées :

$$(P_t\varphi)(y, u) = \varphi(y, u) + \int_{]0, t]} (D_1^{y, u}\varphi)(ds) \quad (\text{équation avant})$$

$$(D_1^{y, u}\varphi)(ds) du = (L_m P_s\varphi)(y, du) ds \quad (\text{équation arrière})$$

généralisation de $P_t L = L P_t$

$$(L_m\varphi)(y, du) = (\partial_u\varphi)(y, du) + \int_F (\varphi(z, 0) - \varphi(y, u)) \lambda(y, u) \beta(y, u; dz) du$$

Si φ est absolument continue :

$$(L_m\varphi)(y, du) = (L\varphi)(y, u) du.$$

CSMP : ennuis créés par les masses de Dirac

Les fonctions $t \rightarrow (P_t\varphi)(y, u)$ et $u \rightarrow (P_t\varphi)(y, u)$ sont à variations bornées :

$$(P_t\varphi)(y, u) = \varphi(y, u) + \int_{]0, t]} (D_1^{y, u}\varphi)(ds) \quad (\text{équation avant})$$

$$(D_1^{y, u}\varphi)(ds) du = (L_m P_s\varphi)(y, du) ds \quad (\text{équation arrière})$$

généralisation de $P_t L = L P_t$

$$(L_m\varphi)(y, du) = (\partial_u\varphi)(y, du) + \int_F (\varphi(z, 0) - \varphi(y, u)) \lambda(y, u) \beta(y, u; dz) du$$

Si φ est absolument continue :

$$(L_m\varphi)(y, du) = (L\varphi)(y, u) du.$$

Cela ne permet pas d'avoir une caractérisation des mesures stationnaires par une équation fonctionnelle manipulable.

Comportement asymptotique des CSMP et des PDMP

L'étude du comportement asymptotique des CSMP présente les mêmes difficultés que l'étude du comportement asymptotique des équations de renouvellement markovien.

D'ailleurs, la plupart des articles mentionnés pour la deuxième question s'intéressent également à la première, ou à l'étude du comportement asymptotique de (\tilde{Z}_t, W_t) :

$$\text{sur } T_n \leq t < T_{n+1}, \quad \tilde{Z}_t = Y_{n+1}, \quad W_t = T_{n+1} - T_n.$$

On en déduit des résultats pour les PDMP qui sont des fonctions déterministes des CSMP.

Comportement asymptotique des CSMP et des PDMP

O. Costa a établi les liens entre **DES probabilités stationnaires des PDMP** et **DES probabilités stationnaires de la chaîne Y** :

O. L.V. COSTA, Stationary distributions for piecewise-deterministic Markov processes, *Journal of Applied Probability*, **27**, 1, p. 60–73, 1990.

En général il n'y a **pas équivalence** entre existence d'une **probabilité stationnaire** pour le PDMP et pour la chaîne.

Ce n'est pas étonnant si on regarde ce qui se passe pour un CSMP.

Comportement asymptotique des CSMP et des PDMP

Pour les PDMP, O. Costa et F. Dufour ont exhibé une autre chaîne de Markov que Y pour laquelle **il y a toutes les équivalences souhaitées** : récurrence, Harris-récurrence (resp. positive), ergodicité.

O., L.V. COSTA, F. DUFOUR, Stability and ergodicity of piecewise-deterministic Markov processes, *SIAM J. Control Optim.*, **47**, 2, p. 1053–1077, 2008.

Mais dans les applications, les probabilités de transition de la chaîne en question sont encore **plus difficiles à manipuler** que celles de la chaîne Y .

Comportement asymptotique des CSMP et des PDMP

En reprenant l'article de Jacod (1971), et en travaillant avec (Z_t, A_t) au lieu de (\tilde{Z}_t, W_t) , on montre que :

- si ν est une **mesure** invariante pour Y et si Y est Harris-récurrente ou si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_k} \mathbb{E}_y(h(Y_n) e^{-\rho T_n}) \nu(dy) = 0, \quad \rho \in \mathbb{R}_+^*, \quad F = \cup_k G_k,$$

pour h positive bornée, alors

$$m(dy) = \mathbb{P}_y(T_1 > u) \nu(dy) du \quad (2)$$

est une **mesure** invariante pour le CSMP,

- si m est une **mesure** invariante pour le CSMP, il existe une **mesure** ν qui vérifie (2) et qui est stable pour la chaîne,
- si Y est Harris-récurrente, alors le CSMP est Harris-récurrent.

Résultats analogues avec le PDMP en remplaçant m par m_ϕ , image de m par ϕ .

Plan

Introduction

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus pilotés

Généralisation des PDMP

Comment remplacer les processus déterministes des PDMP par des processus aléatoires ?

Généralisation des PDMP

Comment remplacer les processus déterministes des PDMP par des processus aléatoires ?

On remplace ϕ

$$\phi(y, t + s) = \phi(\phi(y, s), t), \quad \phi(y, 0) = y$$

par ζ

$$\zeta \text{ processus de Markov, } \zeta^y(0) = y,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \phi(y, v) &\rightarrow \zeta^y(v) \\ N(y, dz, dv) &\rightarrow M(\zeta^y, dz, dv) \end{aligned}$$

Généralisation des PDMP

$$N(y, dz, dv) = dF_y(v) Q(\phi(y, v); dz)$$

$$M(\zeta^y, dz, dv) = dF_{\zeta^y}(v) Q(\zeta^y(v); dz)$$

Dans dF_y :

$$b(\phi(y, v)) \rightarrow b(\zeta^y(v))$$

$$\alpha(y) = \inf\{t : \phi(y, t) \in \Gamma\} \rightarrow \alpha(\zeta^y) = \inf\{t : \zeta^y(t) \in \Gamma\}$$

Pour $T_n \leq t < T_{n+1}$:

$$\Psi_t = \Phi(Y_n, t - T_n) \rightarrow \Psi_t = \zeta^{Y_n}(t - T_n)$$

La frontière Γ n'introduit pas de masses de Dirac, c'est-à-dire pas des complications dans les formules, si pour tout y la loi du temps d'atteinte de Γ par ζ^y admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Intérêt

Cela permet de modéliser notamment :

- des processus subissant des chocs

- des processus multiphases

Intérêt

Cela permet de modéliser notamment :

- des processus subissant des chocs

Par exemple la propagation d'une fissure, hors chocs, est modélisée par un processus Gamma. Lors d'un choc, la taille de la fissure s'accroît, la loi de l'accroissement dépendant de la taille de la fissure juste avant le choc.

Dans ce cas, les sauts provoqués par le dépassement d'un seuil donné n'introduisent pas de masses de Dirac.

- des processus multiphases

Intérêt

Cela permet de modéliser notamment :

- des processus subissant des chocs

Par exemple la propagation d'une fissure, hors chocs, est modélisée par un processus Gamma. Lors d'un choc, la taille de la fissure s'accroît, la loi de l'accroissement dépendant de la taille de la fissure juste avant le choc. Dans ce cas, les sauts provoqués par le dépassement d'un seuil donné n'introduisent pas de masses de Dirac.

- des processus multiphases

Par exemple les phases peuvent être les phases de décollage, de vol et d'atterrissage d'un avion.

Intérêt

Cela permet de modéliser notamment :

- des processus subissant des chocs

Par exemple la propagation d'une fissure, hors chocs, est modélisée par un processus Gamma. Lors d'un choc, la taille de la fissure s'accroît, la loi de l'accroissement dépendant de la taille de la fissure juste avant le choc. Dans ce cas, les sauts provoqués par le dépassement d'un seuil donné n'introduisent pas de masses de Dirac.

- des processus multiphases

Par exemple les phases peuvent être les phases de décollage, de vol et d'atterrissage d'un avion.

A la Journée SMAI - IMdR, "Mathématiques Appliquées et Sûreté de Fonctionnement" à Pau en février 2009, J.P. Signoret (Total) s'est plaint que les universitaires ne s'intéressaient pas aux phénomènes multi-phases ...

Quelques résultats

- (Y, T) est un **processus de renouvellement markovien** de noyau $N(y, dz, dv) = \mathbb{E}(M(\zeta^y; dz, dv))$,
- Ψ est un processus de Markov,
- **stabilité par "passage des composants au système"** : si Ψ^1 et Ψ^2 sont deux processus pilotés indépendants, (Ψ^1, Ψ^2) est un processus piloté,
- **nombre moyen de pannes** : propriété du PRM (Y, T) .
- **formule de passage du processus piloté au CSMP** : $\Psi_t = \zeta^{Z_t}(A_t)$ est une fonction aléatoire de (Z_t, A_t) , cependant :

$$\mathbb{E}(f(\Psi_t)) = \mathbb{E}(\varphi(Z_t, A_t)),$$

$$\varphi(z, v) = \frac{f(\zeta^z(v)) M(\zeta^z, F \times]v, +\infty])}{\mathbb{E}(M(\zeta^z, F \times]v, +\infty])} = \mathbb{E}(f(\zeta^z(v)) / T_1 > v),$$

Une thèse

Dans le cas où ζ est un processus de diffusion :

JULIEN BECT, **Processus de Markov diffusifs par morceaux : outils analytiques et numériques**, *Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, Spécialité physique, Ecole doctorale "Sciences et Technologies de l'Information, des Télécommunications et des Systèmes"*, 18 juin 2007.

Directeur de thèse : Gilles Fleury (Supélec, Département Signaux et Systèmes Electroniques)

Des sujets à explorer

- Statistiques sur les PDMP et les processus pilotés
- Les processus pilotés sont-ils des processus ?
- Autres propriétés des processus pilotés
- Méthodes numériques
- Est-ce que cette approche par les CSMP apporte des éléments nouveaux sur :
 - ▶ les diffusions à sauts ?
 - ▶ des modèles particuliers rencontrés dans la littérature, motivés par la fiabilité (par exemple "Conditional Levy Processes", Çinlar - 2003 -) ?
- ...