



utt

université de technologie  
Troyes



NTNU

# Approximation de processus de renouvellement superposés par des modèles d'âge virtuel ou de copules

Yann Dijoux, Xingheng Liu, Jørn Vatn

Equipe M2S

Université de Technologie de Troyes

RAMS group

Norwegian University of Science and Technology

*Séminaire FIMA*

*23 janvier 2020*



# Les processus de renouvellement superposés

- 1 Les processus de renouvellement superposés
- 2 Nouvelles approximations d'un SRP
- 3 Efficacité des approximations
- 4 Matériels de signalisation Banenor
- 5 Conclusion



## Exemple

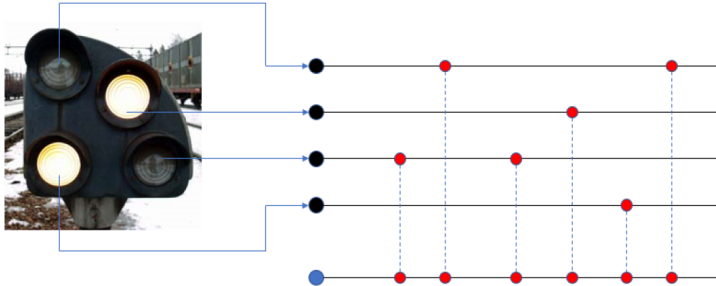


Figure: Carré nain

- Système réparable formé de composants en série indépendants.
- Pas de prise en compte de DCC.
- Une défaillance est détectée immédiatement.
- Pas de politique de maintenance préventive.



## Exemple (suite)

→ Suite à une défaillance, la maintenance corrective est de type Partial-Repair (Bedford and Lindqvist 2004):

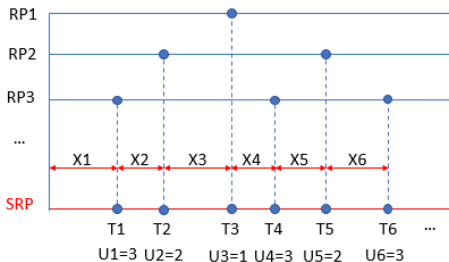
- Le composant défaillant est réparé à neuf (AGAN).
- Maintenance minimale pour les autres composants (ABAO).

→ Cela consiste à observer la superposition de  $n = 4$  processus de renouvellement indépendants (SRP, Superimposed Renewal Processes).

→ L'information concernant les instants de défaillance est supposée connue tandis que les indications sur les composants responsables de la panne ne sont pas enregistrés.



# Notations



→ Instants de défaillance du système:  $\{T_i\}_{i \geq 1}$ .

→ IFT:  $\{X_i\}_{i \geq 1}$ .

→ Sources/Indicateurs/couleurs:  $\{U_i\}_{i \geq 1}$ .

→ La durée des réparations est supposée négligeable.



## SRP et estimation

- Lorsque les indicateurs sont disponibles, les composants peuvent être traités indépendamment, mais le nombre de paramètres dans la modélisation est très élevé.
- Il est théoriquement possible de faire de l'inférence sur les paramètres de chaque composant lorsque les indicateurs sont manquants (Tian 2013), mais la complexité des partitionnements nécessaires est exponentielle.
- Lorsque les indicateurs sont absents et en présence d'un très grand nombre de composants, un SRP converge vers un processus de Poisson Homogène (Franken 1963).
- Pour un nombre modéré de composants, l'approximation exponentielle est insuffisante et des modélisations alternatives sont proposées, classiquement basée sur un unique processus de renouvellement.



## Approximations d'un SRP

- Utilisation d'un unique RP dont la loi générique est  $X_\infty$ , loi asymptotique du SRP (Stationary Interval Method, SIM, Whitt 1982, Torab and Kamen 2001).
- Possibilité de modéliser l'indicateur  $\{U_i\}$  par une loi binomiale/multinomiale (Blumenthal 1991).
- Unique RP simplement paramétrisable (loi hypo- ou hyper-exponentielle) dont les moments soient identiques à ceux du SRP (Whitt 1982).
- Pour des composants identiques, loi de mélange avec hypothèses ABAO et AGAN proposée récemment par Scarf et Wu (2017)

→ On considère aussi classiquement que le SRP est dans son régime stationnaire au début des observations.

→ Peu de modélisations dynamiques prenant en compte la loi conjointe des durée inter-défaillance successives.



## Types de SRP étudiés

- Les composants ont une loi de durée de vie qui suit une **loi de Weibull** dont le paramètre de forme  $\beta$  est commun à tous les composants.
- Un SRP se caractérise par la donnée du paramètre de forme  $\beta$  et du vecteur des paramètres de forme  $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  et sera noté  $WSRP(\vec{\eta}, \beta)$ .
- Le nombre de composants  $n$  est compris entre 2 et 6.
- Deux classes de configurations sont étudiées: celui où les paramètres d'échelle sont homogènes (identiques) ou bien relativement hétérogènes.
- Résultats théoriques sur les SRP un peu plus généraux pour des lois quelconques.
- Méthodes d'approximation de SRP valides pour d'autres lois.





## Propriété des SRP

### SRP et NQD (Dijoux and Liu)

Pour des composants identiques et de loi générique IFR, la loi jointe des durées inter-occurrence  $(X_n, X_{n+1})$  est NQD (Negative quadrant Dependent).

→ Résultats un peu plus généraux où il est montré que la dépendance est  $RR_2$  (Reverse Regular of Order 2).

→ Quand le système est dans son état stationnaire, un moyen simple de visualiser cette dépendance est de regarder la fonction copule (les deux marginales sont identiques et égales à  $X_\infty$ ) ou directement la densité conditionnelle.

→ **La dépendance négative n'est généralement pas présente dans les approximations des SRP.**



## Loi jointe $(X_n, X_{n+1})$

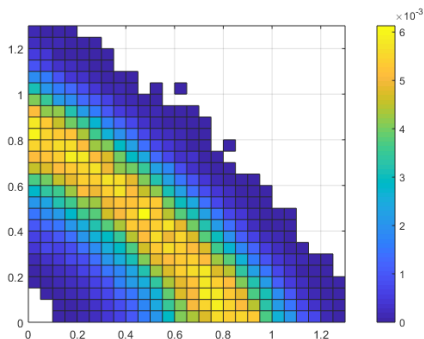


Figure:  $WSRP(\vec{\eta} = (1, 1), \beta = 4)$



## Loi jointe $(X_n, X_{n+1})$

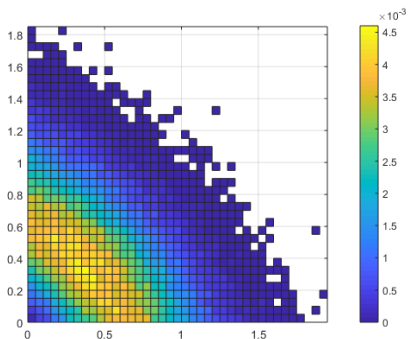


Figure:  $WSRP(\vec{\eta} = (1, 1, 2), \beta = 4)$



## Loi jointe $(X_n, X_{n+1})$

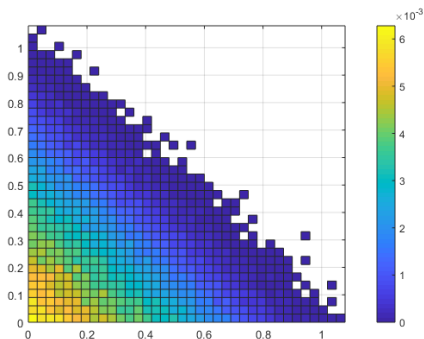


Figure:  $WSRP(\vec{\pi} = (1, 1, 1, 1, 1), \beta = 4)$



# Nouvelles approximations d'un SRP

- 1 Les processus de renouvellement superposés
- 2 Nouvelles approximations d'un SRP**
- 3 Efficacité des approximations
- 4 Matériels de signalisation Banenor
- 5 Conclusion



## Approximation par loi jointe

- Le début des observations se trouve dans l'état stationnaire du SRP.
- La densité conditionnelle  $f_{X_{n+1}|X_n=x}(y)$  est supposée connue dans un premier temps.
- On peut caractériser cette approximation par sa copule correspondante dont les lois marginales correspondent toutes les deux à la variable aléatoire  $X_\infty$  et la copule  $C$  est supposée connue.
- Modèle  $IAT_1$  pour Inter-Arrival-Time copula of memory 1.
- Généralisation possible avec un conditionnement d'ordre supérieur.



## Approximation par modèle d'âge virtuel

- Un SRP est un moyen de caractériser un système en configuration série en présence de **maintenance imparfaite**. Un SRP présente un **régime stationnaire** ainsi qu'une **dépendance négative** relative à l'observation de deux durées successives.
- Si plusieurs réparations successives ont lieu pendant une courte période, il est vraisemblable qu'un composant différent ait été remis à neuf à chaque réparation. Le système est donc relativement jeune.
- L'efficacité d'une maintenance Partial-Repair est relativement **homogène**.

→ Parmi l'ensemble des modèle d'âge virtuel, **l'hypothèse  $ARA_{\infty}$**  semble correspondre le mieux.

→ L'hypothèse Brown-Proschan a aussi été testée dans l'article.



## L'hypothèse $ARA_{\infty}$

→ Après une maintenance, l'âge virtuel d'un système est proportionnel à son âge juste avant la maintenance.

$$A_{i+1} = (1 - \rho)(A_i + X_{i+1})$$

→  $\rho = 1$  et la maintenance est AGAN,  $\rho = 0$  et la maintenance est ABAO.

→ Modèle de **maintenance imparfaite** présentant un **régime stationnaire** (Last and Szekli, 1998) lorsque  $\rho > 0$ .

→ Si plusieurs maintenances *en cascade* de type  $ARA_{\infty}$  ont lieu, l'âge virtuel du système décroît géométriquement et le système est relativement jeune.

→ Efficacité des maintenances **homogène** comparativement à l'hypothèse Brown-Prochan (une maintenance est soit AGAN, soit ABAO).





## Propriété $ARA_{\infty}$

### $ARA_{\infty}$ et NQD (Dijoux and Liu)

On considère un système dont la maintenance suit l'hypothèse  $ARA_{\infty}$  et dont la loi du système neuf est de Weibull avec un paramètre de forme  $\beta_0 > 1$ . La loi jointe des durées inter-occurrence  $(X_n, X_{n+1})$  est NQD (Negative quadrant Dependent).



## Loi jointe $(X_n, X_{n+1})$

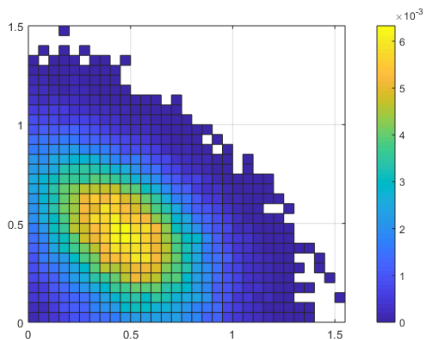


Figure:  $WARA_{\infty}(\eta = 1, \beta = 5, \rho = 0.25)$



## Choix des paramètres $WARA_{\infty}(\eta, \beta_0, \rho)$

→ A partir d'un modèle  $WSRP(\vec{\eta}, \beta)$ , on simule un échantillon suffisamment long (vecteur  $X_{sim}$  de  $> 10^5$  observations) dans son état stationnaire.

→ On fait l'hypothèse que le vecteur  $X_{sim}$  est un échantillon de loi  $WARA_{\infty}(\eta, \beta_0, \rho)$ .

→ On estime les paramètres  $\eta, \beta_0$  et  $\rho$  par maximum de vraisemblance.

→ On vérifie empiriquement que lorsque la taille de  $X_{sim}$  augmente, les estimateurs  $\hat{\eta}, \hat{\beta}_0$  et  $\hat{\rho}$  convergent.

- $\hat{\beta}_0 \simeq \beta$
- $\hat{\rho}$  décroît quand le nombre de composants en série augmente.
- $\hat{\rho}$  est de l'ordre de grandeur de  $\frac{1}{n}$  si les  $n$  composants en série sont identiques.
- Ordre de grandeur des estimateurs relativement précis obtenus à partir de 50 observations.

→ Les paramètres  $\hat{\eta}, \hat{\beta}_0$  et  $\hat{\rho}$  sont supposés tout d'abord connus.



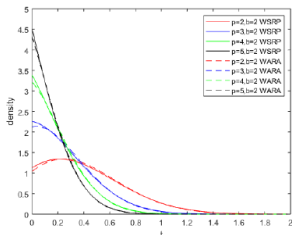
# Efficacité des approximations

- 1 Les processus de renouvellement superposés
- 2 Nouvelles approximations d'un SRP
- 3 Efficacité des approximations**
- 4 Matériels de signalisation Banenor
- 5 Conclusion

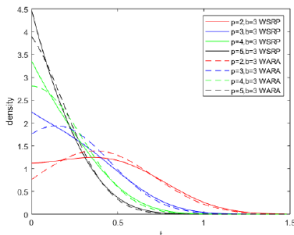


## Distribution asymptotique

→ Comparaison entre la densité WSRP [composants identiques] dans son régime stationnaire et la densité asymptotique du processus  $WARA_{\infty}$  correspondant.



(a)  $\beta=2$ ,  $p = 2, 3, 4, 5$



(b)  $\beta=3$ ,  $p = 2, 3, 4, 5$

→ Approximation très précise pour des composants avec une cinétique de vieillissement modéré ( $\beta < 2.5$ )

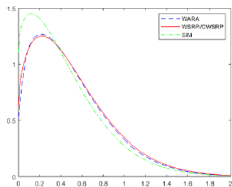
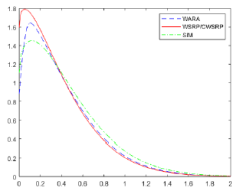
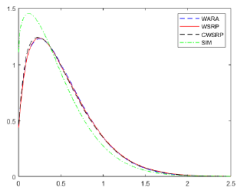
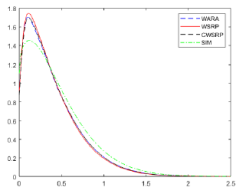


## Evaluation de la performance à partir de quartiles

- Comparaison entre  $SIM$ ,  $WARA_\infty$  et  $IAT_1$ .
- Prise en compte de la loi conditionnelle d'un intervalle, sachant que le précédent était important ( $> Q_3$ ) ou faible ( $< Q_1$ ).
- Tracé de densités conditionnelles telles que  $f_{X_{n+1}|X_n > Q_3}(x)$ .
- 3 composants et une valeur faible ou élevée de  $\beta$ .

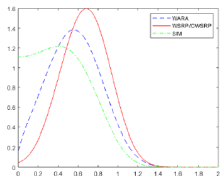
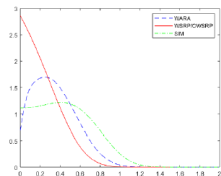
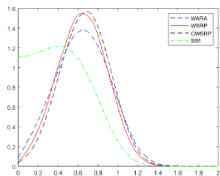
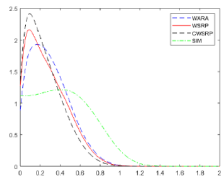


$$\beta = 1.5$$

(a)  $f_{X_n | X_{n-1} \leq Q_1}$ (b)  $f_{X_n | X_{n-1} \geq Q_3}$ (a)  $f_{X_n | X_{n-1} \leq Q_1, X_{n-2} \leq Q_1}$ (b)  $f_{X_n | X_{n-1} \geq Q_3, X_{n-2} \geq Q_3}$



$$\beta = 3.5$$

(a)  $f_{X_n | X_{n-1} \leq Q_1}$ (b)  $f_{X_n | X_{n-1} \geq Q_3}$ (a)  $f_{X_n | X_{n-1} \leq Q_1, X_{n-2} \leq Q_1}$ (b)  $f_{X_n | X_{n-1} \geq Q_3, X_{n-2} \geq Q_3}$



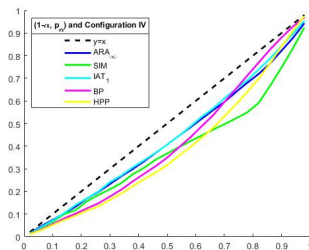
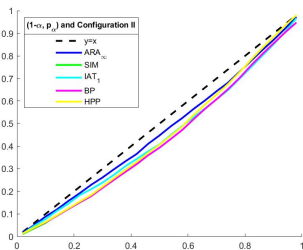


## Evaluation de la performance à partir de Level-Sets

- Simulation d'une trajectoire WSRP longue ( $> 10^5$  observations)
- Après chaque défaillance, calculer l'intervalle de confiance WSRP de plus petite amplitude  $\ell$  pour la prochaine durée, avec un risque  $\alpha$  et une information complète.
- Pour chaque modèle d'approximation, calculer le *meilleur* intervalle d'amplitude  $\ell$ .
- Comparer le risque théorique  $\alpha$  à ses versions empiriques.
- Déterminer un indice de Gini.



# Résultats Level-Sets



	HPP	SIM	$IAT_1$	$ARA_{\infty}$	BP
I ( $WSRP(\vec{\eta}) = (1, 1, 1), \beta = 1.5$ )	9.1	8.9	8.5	8.2	8.6
II ( $WSRP(\vec{\eta}) = (1, 1, 1), \beta = 3.5$ )	119.2	119.5	137.0	89.4	144.0
III ( $WSRP(\vec{\eta}) = (1, 2, 10), \beta = 1.5$ )	6.5	7.2	6.2	3.0	5.9
IV ( $WSRP(\vec{\eta}) = (1, 2, 10), \beta = 3.5$ )	222.7	230.1	116.1	133.8	204.5
V ( $WSRP(\vec{\eta}) = (1, 1, 1, 1, 1, 1), \beta = 2.5$ )	2.8	4.3	4.3	3.0	5.6



## Paramètres inconnus

→ A partir d'un échantillon de taille  $n$  d'un modèle  $WSRP(\vec{\eta}, \beta)$  dans son régime stationnaire, évaluer la performance des modèles d'approximation en termes de MSE pour deux prédicteurs:

- l'espérance asymptotique  $\mathbb{E}[X_\infty]$ .
- le coefficient de corrélation de Pearson entre deux durées successives lorsque le système est dans son régime stationnaire.

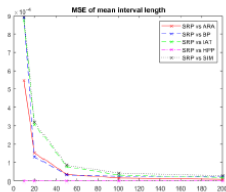
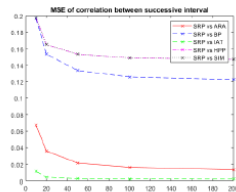
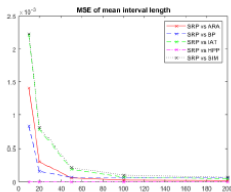
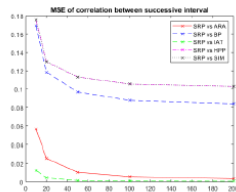
→ Implémentation à l'aide de simulations de Monte-Carlo pour des échantillons inférieurs à 200 observations.

→ Dans le cadre de l'approximation  $IAT_1$ , la copule de Frank fournit les meilleures performances (comparativement aux copules gaussiennes, de Gumbel ou de Student).

→ Les estimations pour les autres méthodes sont basées sur la méthode du maximum de vraisemblance.



# Résultats

(a) MSE of  $E[X_\infty]$ (b) MSE of *Corr*Configuration A:  $\eta = [1, 1, 1], \beta = [3.5, 3.5, 3.5]$ (a) MSE of  $E[X_\infty]$ (b) MSE of *Corr*Configuration B:  $\eta = [1, 2, 10], \beta = [3.5, 3.5, 3.5]$



## Synthèse

→  $IAT_1$  et  $ARA_\infty$  ont des performances similaires et prennent en compte l'aspect dynamique du processus SRP.

→ La complexité des calculs et le nombre de paramètres pour les nouveaux modèles restent faibles.

→ Calculs de performance effectués dans certaines configurations WSRP en présence de maintenance préventive et conclusions similaires.

→ Pour des systèmes dont les composants ont une cinétique de vieillissement modéré ( $\beta < 2.5$ ), l'hypothèse  $ARA_\infty$  semble fournir le meilleur compromis sur les critères Performance statique / Performance dynamique / Nombre de paramètres / Simplicité d'implémentation / Rapidité des calculs.



# Matériels de signalisation Banenor

- 1 Les processus de renouvellement superposés
- 2 Nouvelles approximations d'un SRP
- 3 Efficacité des approximations
- 4 Matériels de signalisation Banenor**
- 5 Conclusion



## Présentation des matériels

- Matériels présents sur le réseau ferroviaire norvégien et géré par Banenor.
- Système formé d'un panneau de signalisation comprenant 2 à 5 ampoules.
- 1608 systèmes présents sur l'ensemble du territoire.
- Maintenance Corrective de type Partial-Repair effectuée dans des délais très courts après la défaillance.
- Aucune indication sur l'identification de l'ampoule remplacée dans la base de données.
- Maintenance préventive (relativement) périodique afin de remplacer les ampoules rouges.



## Ensemble des données

→ Données fortement censurées.

NB. défaillances	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
NB. systèmes	821	419	178	95	51	17	11	8	2	4	0	2

**Table:** Répartition du nombre de défaillances par systèmes

→ Hétérogénéité supplémentaire du fait d'un changement de technologie entre des ampoules à incandescence et des ampoules LED.

→ Hétérogénéité potentielle additionnelle due à la localisation.

→ Difficulté d'exploiter l'ensemble des données directement [prise en compte expertise]





## Cohorte des systèmes les plus défailants

→ 16 systèmes ont été soumis à au moins 7 CM.

	Parameters	$A_0$	$E(X)$
ARA $_{\infty}$	$\alpha = 2.16 \cdot 10^{-12}$ $\beta = 3.5363$ $\rho = 0.2277$	1706.1	502.97
BP	$\alpha = 2.55 \cdot 10^{-7}$ $\beta = 2.2417$ $\rho = 0.4698$	575.07	509.63
HPP	460.27	0	460.27
IAT $_1$	$\theta = 0.1365$	0	440.12
SIM		0	440.12

Table: Estimations et prédicteurs



# Conclusion

- 1 Les processus de renouvellement superposés
- 2 Nouvelles approximations d'un SRP
- 3 Efficacité des approximations
- 4 Matériels de signalisation Banenor
- 5 Conclusion**



## Futures pistes

- Approfondir l'étude Banenor actuelle
- Vérifier la qualité du pronostic obtenu par  $ARA_{\infty}$  pour des données issues de systèmes industriels.
- Caractériser analytiquement le lien entre SRP et l'hypothèse  $ARA_{\infty}$
- Etudier la performance des approximations lorsque les lois de durées de vie des composants sont plus générales.
- Etudier la performance des approximations lorsque la dépendance structurelle (RBD) est plus générale qu'un système série.