

**Un modèle d'âge virtuel avec
intensité de défaillance en baignoire.**

Yann DIJOUX

Institut National Polytechnique de Grenoble
Laboratoire LMC
BP 53 - 38 041 Grenoble Cedex 9 France

Contexte

- Etude de systèmes réparables soumis à des maintenances correctives (CM, réparations) suite à des défaillances (pannes).
- Présence d'une période de r dage des systèmes.

Motivations

- Données EDF où les premiers instants de panne avaient du être tronqués pour poursuivre l' étude.
- Modèles de réparation imparfaite uniquement adaptés à des systèmes simplement dégradables.

Objectif

Présenter un modèle de réparation imparfaite adapté à des systèmes présentant une période de jeunesse.

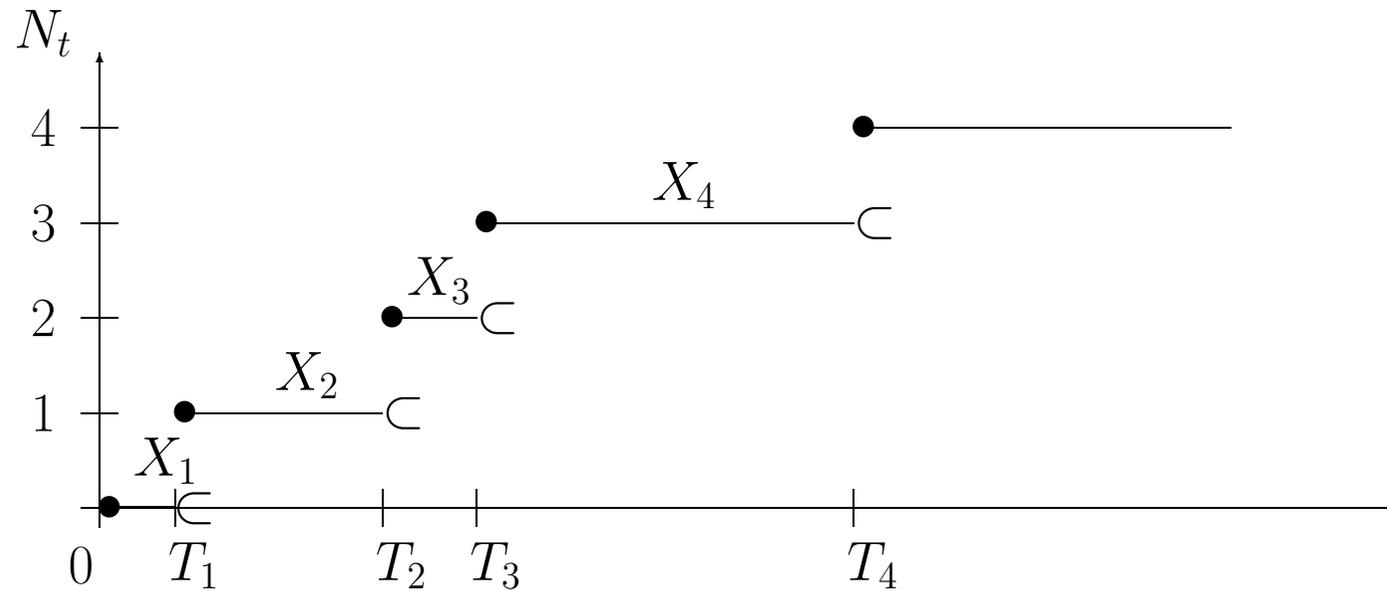
Plan

1. Modèles classiques de maintenance imparfaite.
 - Modélisation du processus de défaillances.
 - Modèles classiques : ABAO, AGAN, modèles d'âge virtuels.
 - Limites des modèles usuels pour des intensités de défaillance non croissantes.

2. Un modèle d'âge virtuel avec intensité de défaillance en baignoire.
 - Principe des intensités en baignoire.
 - Définition du modèle.
 - Caractéristiques principales du modèle.
 - Allongement de la durée de vie.
 - Une méthode d'estimation.

3. Conclusion et perspectives.

Notations



- les instants de défaillance : $\{T_i\}_{i \geq 1}$
- les durées inter-défaillances : $X_i = T_i - T_{i-1}$, $i \geq 1$
- le processus de comptage des défaillances : $\{N_t\}_{t \geq 0}$, $N_t =$ nombre de pannes avant l'instant t
- Une CM a lieu après chaque défaillance.
- On ne prend pas en compte les durées des réparations.
- On ne peut pas observer deux défaillances au même instant.

Modélisation du processus des défaillances

l'intensité de défaillance : λ_t

$$\lambda_t = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} P(N_{t+dt} - N_t = 1 | \mathcal{H}_t)$$

where \mathcal{H}_t est l'histoire du processus à l'instant t .

Processus auto-excité : $\mathcal{H}_t = \sigma(\{N_s\}_{0 \leq s \leq t})$.

$\Rightarrow \lambda_t$ définit entièrement le processus des défaillances.

Avant la première panne, l'intensité de défaillance est une fonction déterministe et continue du temps $\lambda(t)$, appelée intensité initiale, taux de hasard de T_1

la fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance associée à l'observation de n défaillances sur l'intervalle $[0, t]$ s'écrit :

$$L_t(\theta) = \left[\prod_{i=1}^n \lambda_{t_i}(i-1; t_1, \dots, t_{i-1}) \right] \exp \left(- \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda_u(i-1; t_1, \dots, t_{i-1}) du \right)$$

Modèles classiques

Le modèle de réparation minimale ou modèle As Bad As Old (ABAO)

- Chaque maintenance remet le système en marche dans l'état exact où il était juste avant la défaillance.
- Le processus de défaillance correspond alors à un processus de Poisson non homogène (NHPP).

$$\lambda_t = \lambda(t)$$

Le modèle de réparation parfaite ou modèle As Good As New (AGAN)

- Chaque maintenance remet le système à neuf.
- Le processus de défaillance correspond alors à un processus de renouvellement (RP).

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_t})$$

La réalité se situe entre les modèles ABAO et AGAN

Les modèles d'âge virtuel

Après la $i^{\text{ème}}$ panne, le système se comporte comme un système neuf ayant survécu un âge A_i .

$$\forall i \geq 0, \quad \forall t \geq 0 P(X_{i+1} > t | X_1, \dots, X_i) = P(X_1 > A_i + t | X_1 > A_i) = \frac{S(A_i + t)}{S(A_i)}$$

où S est la fonction de survie associée à X_1 .

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_t} + A_{N_t})$$

Les A_i sont appelés **âge effectifs**. $A_0 = 0$.

- ABAO : $A_i = T_i$
- AGAN : $A_i = 0$
- Le modèle de réduction arithmétique de l'âge (ARA_1) :

$$A_i = (1 - \rho)T_i$$

ρ est appelé **facteur d'amélioration** ou **efficacité de maintenance** :

Le modèle de Brown-Proschan

Principe : les réparations sont soit parfaites (AGAN) avec une probabilité p , soit minimales (ABAO) avec une probabilité $1-p$.

Modélisation

$$\begin{cases} Z_i = 1 & : i^{\text{ème}} \text{ réparation AGAN} \\ Z_i = 0 & : i^{\text{ème}} \text{ réparation ABAO} \end{cases}, Z_i \overset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{B}(p)$$

⇒ L'âge virtuel du système est le temps écoulé depuis la dernière réparation parfaite.

Intensité de défaillance

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_t} + \sum_{j=1}^{N_t} \left(\prod_{k=j}^{N_t} (1 - Z_k) \right) X_j)$$

Cas classique : l'intensité initiale est croissante

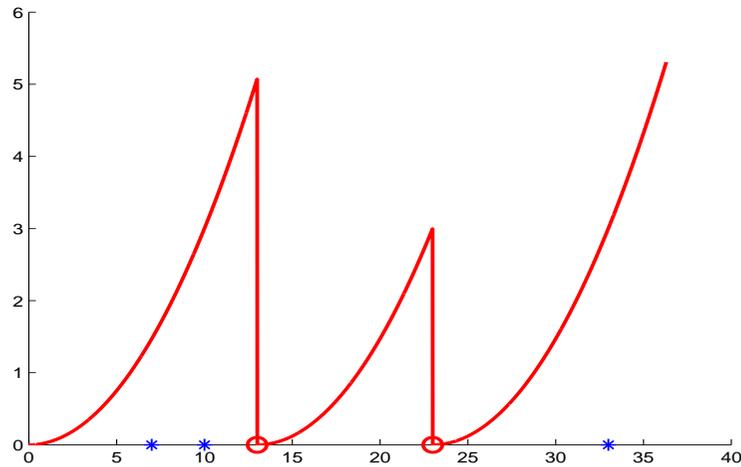


FIG. 1 - modèle BP et intensité croissante ($p = 0.5$)

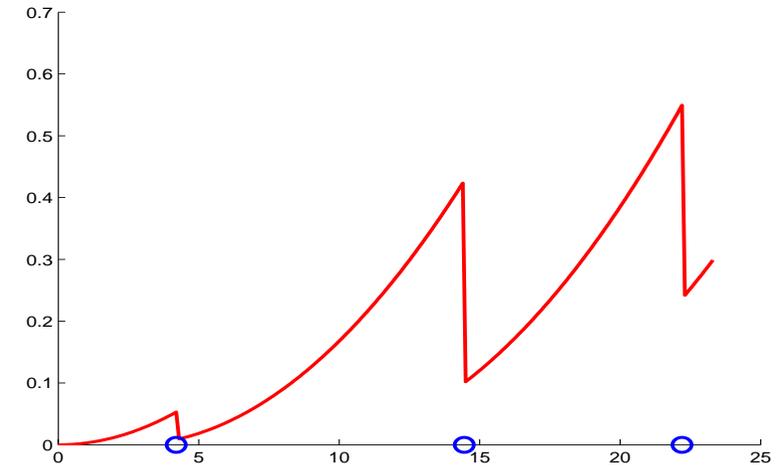


FIG. 2 - modèle ARA et intensité croissante ($\rho = 0.5$)

Principe des modèles :

$$A_i \leq A_{i-1} + X_i$$

⇒ Comme le système intrinsèquement se dégrade, les réparations sont efficaces

Lorsque l'intensité initiale est décroissante

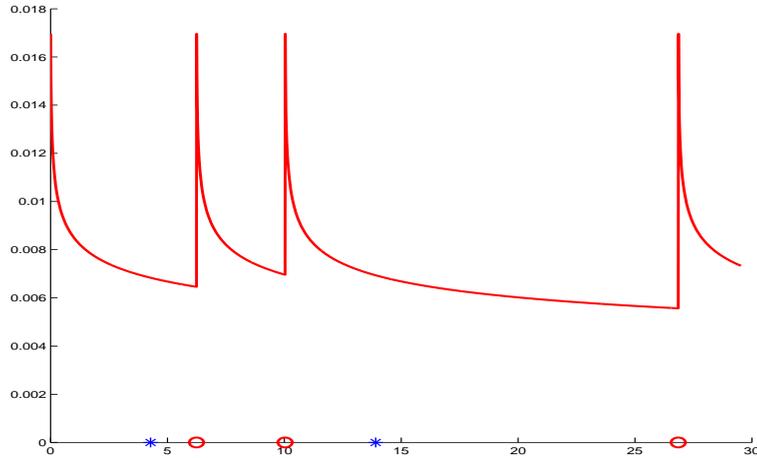


FIG. 3 – modèle BP et intensité décroissante ($p = 0.5$)

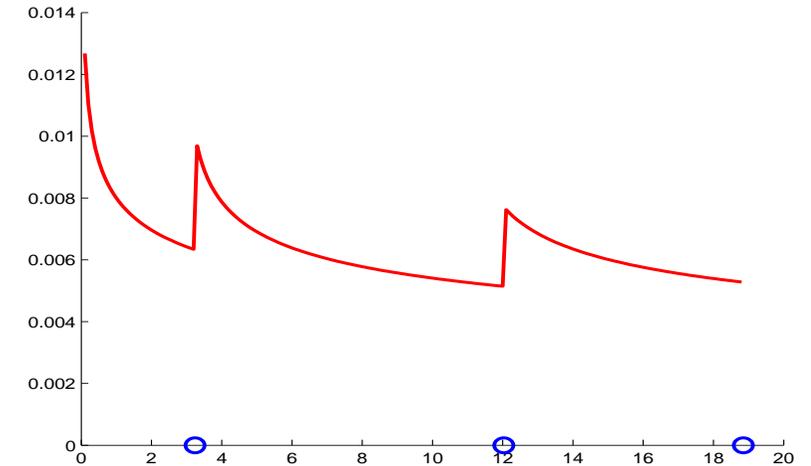


FIG. 4 – modèle ARA et intensité décroissante ($\rho = 0.5$)

Le système s'améliore au cours du temps.

⇒ Le neuf est pire que le vieux.

⇒ Les réparations sont nuisibles.

Il faut adapter les modèles usuels pour prendre en compte des intensités non croissantes.

Les intensités en baignoire

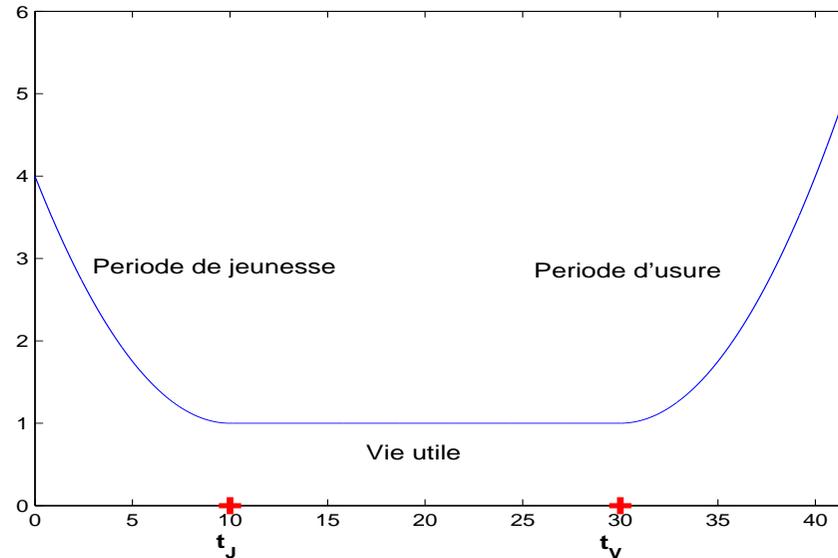


FIG. 5 – Exemple de courbe en baignoire

- Période de jeunesse : $[0; t_J]$: Système en r dage : λ décroissant.
- Période de vie utile : $]t_J; t_V[$: λ constant.
- Période d'usure du système : $[t_V; \infty[$: λ croissant.
- Continuité de l'intensité en t_J et t_V .

Le modèle : l'intensité initiale

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda + \alpha_J \beta_J (t_J - t)^{\beta_J - 1} & \text{si } t \leq t_J \\ \lambda & \text{si } t_J < t < t_V \\ \lambda + \alpha_V \beta_V (t - t_V)^{\beta_V - 1} & \text{si } t_V \leq t \end{cases}$$

– $\lambda, \alpha_J, \alpha_V \geq 0$

– $\beta_V > 1$

– $\beta_J > 1$

- λ : Fréquence des pannes durant la période de vie utile.
- β_V : Interprétation classique en terme de PLP.
- β_J : Interprétation inhabituelle.

Le modèle : l'efficacité de la maintenance

– Période de jeunesse : CM ABAO :

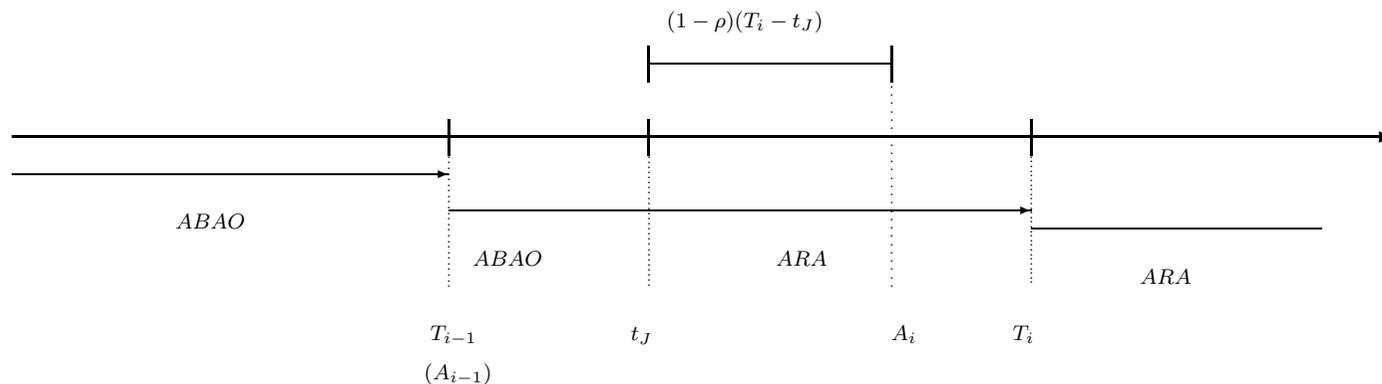
$$A_i = T_i$$

– Durant la vie utile et période d'usure : CM ARA_1 :

$$A_i = A_{i-1} + (1 - \rho)X_i$$

– Première maintenance pendant la vie utile : effet ARA_1 uniquement sur le temps écoulé depuis t_J :

$$A_i = t_J + (1 - \rho)(T_i - t_J)$$



Impact du paramètre ρ

– $\rho = 0 \Rightarrow \forall i, A_i = T_i \Rightarrow$ Réparations minimales (ABAO)

– $\rho = 1 \Rightarrow T_i > t_J, A_i = t_J \Rightarrow$ Réparations optimales

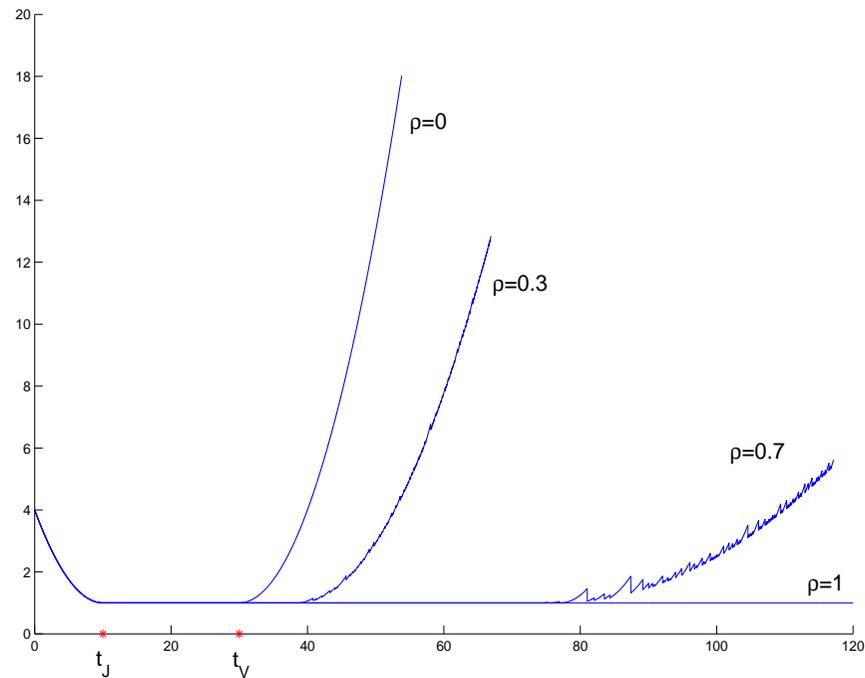


FIG. 6 – Exemples de trajectoires pour différentes valeurs de ρ

Propriétés du modèle

Âges effectifs :

$$\forall i \geq 1; \quad A_i = \begin{cases} T_i & \text{si } T_i \leq t_J \\ T_i - \rho(T_i - t_J) & \text{si } T_i > t_J \end{cases}$$

L'intensité de défaillance :

$$\lambda_t = \begin{cases} \lambda(t) & \text{si } T_{N_{t^-}} \leq t_J \\ \lambda(t - \rho(T_{N_{t^-}} - t_J)) & \text{si } T_{N_{t^-}} > t_J \end{cases}$$

Intensité d'usure minimale

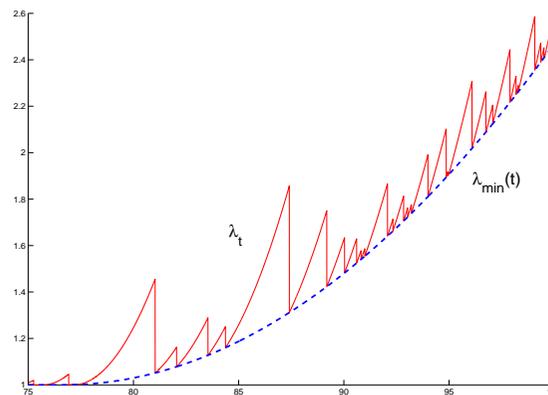
Définition : Support minsup de l'intensité de défaillance :

$$\lambda_t \geq \lambda_{min}(t) \text{ p.s.}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad P(\lambda_t < \lambda_{min}(t) + \epsilon) > 0$$

Calcul :

$$\lambda_{min}(t) = \begin{cases} \lambda(t) & \text{si } t \leq t_J \\ \lambda(t - \rho(t - t_J)) & \text{si } t \geq t_J \end{cases}$$



Propriété : $\lambda_{T_i+} = \lambda_{min}(T_i)$

Allongement de la durée de vie utile

Fin de vie utile effective : Advient lorsqu'une réparation ne remet plus le système dans les meilleures conditions (λ constant) :

$$\tau_V = \text{Inf}\{t > t_J; \lambda_{\min}(t) > \lambda\} = \frac{t_v - \rho t_J}{1 - \rho}$$

Allongement de la vie utile :

$$\tau_V - t_J = \frac{\rho}{1 - \rho}(t_V - t_J)$$

- $\rho = 0 \Rightarrow$ Aucun allongement.
- $\rho = 0.5 \Rightarrow$ Durée de vie utile doublée.
- $\rho = 0.9 \Rightarrow$ Durée de vie utile décuplée.
- $\rho = 1 \Rightarrow$ Durée de vie utile prolongée indéfiniment.

Méthodes d'estimation

Principe : Estimer l'ensemble des paramètres (θ) du modèle :

$$\theta = (\alpha_J, \beta_J, \alpha_V, \beta_V, \lambda, t_J, t_V, \rho)$$

Maximum de Vraisemblance : Estimation conjointe des paramètres trop coûteuse.

Méthode alternative : A partir des instants de défaillance T_1, \dots, T_n :

Pour chaque couple $(i; j)$ $i < j$:

- Approcher les instants t_J et t_V par les instants de défaillance T_i et T_j .
- Estimer λ à partir des données de vie utile.
- Ayant estimé λ , estimer séparément les paramètres relatifs à la période de jeunesse et à la période d'usure.

Enfin, conserver les résultats pour les paramètres maximisant la vraisemblance.

⇒ Méthode très rapide mais nécessitant un nombre non négligeable de données.

Conclusions et perspectives

Conclusions

- Mise en évidence des limites des modèles classiques pour des intensités en baignoire.
- Présentation d'un modèle d'âge virtuel avec intensité de défaillance en baignoire.
- Développement des propriétés du modèle dont l'une exprimant la possibilité d'allongement de vie utile des systèmes.
- Mise en place d'une méthode d'estimation efficace .

Perspectives

- Confronter ce modèles à des données réelles.
- Proposer un modèle d'âge virtuel en période de jeunesse plus efficace.