

Nouveaux modèles d'âge virtuel
pour des intensités de défaillance en
baignoire.

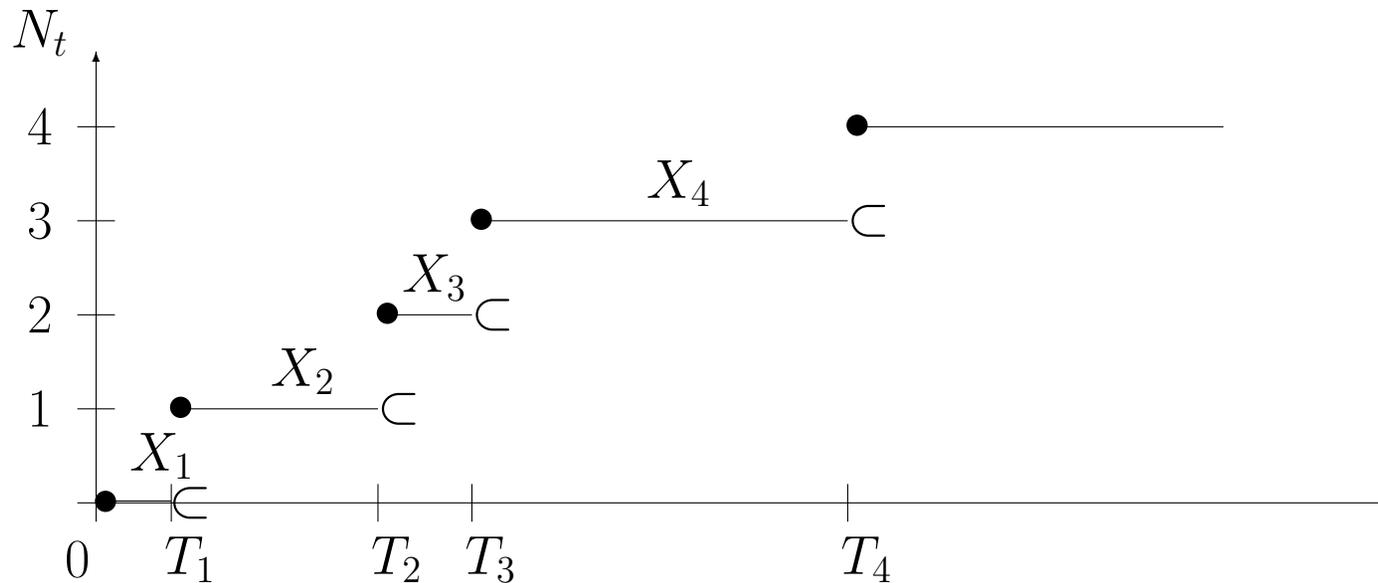
Yann DIJOUX
Edwige IDEE



Plan

1. Modélisation du processus des défaillances.
2. Les intensités en baignoire.
3. Etude d'une intensité particulière.
 - Origine du résultat.
 - Principales caractéristiques.
4. Expression des âges effectifs.
 - Nécessité d'adapter les modèles usuels pour les courbes en baignoire.
 - Différentes classes d'âges effectifs.
5. Applications numériques.
6. Conclusion et perspectives.

Notations



- les instants de défaillance : $\{T_i\}_{i \geq 1}$
- les durées inter-défaillances : $X_i = T_i - T_{i-1}$, $i \geq 1$
- le processus de comptage des défaillances : $\{N_t\}_{t \geq 0}$, $N_t =$ nombre de pannes avant l'instant t
- Une CM a lieu après chaque défaillance.
- On ne prend pas en compte les durées des réparations.
- On ne peut pas observer deux défaillances au même instant.

Modélisation du processus des défaillances

l'intensité de défaillance : λ_t

$$\lambda_t = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} P(N_{t+dt} - N_t = 1 | \mathcal{H}_t)$$

where \mathcal{H}_t est l'histoire du processus à l'instant t .

Processus auto-excité : $\mathcal{H}_t = \sigma(\{N_s\}_{0 \leq s \leq t})$.

$\Rightarrow \lambda_t$ définit entièrement le processus des défaillances.

Avant la première panne, l'intensité de défaillance est une fonction déterministe et continue du temps $\lambda(t)$, appelée intensité initiale, taux de hasard de T_1

la fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance associée à l'observation de n défaillances sur l'intervalle $[0, t]$ s'écrit :

$$L_t(\theta) = \left[\prod_{i=1}^n \lambda_{t_i}(i-1; t_1, \dots, t_{i-1}) \right] \exp \left(- \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda_u(i-1; t_1, \dots, t_{i-1}) du \right)$$

Modèles classiques

Le modèle de réparation minimale ou modèle As Bad As Old (ABAO)

- Chaque maintenance remet le système en marche dans l'état exact où il était juste avant la défaillance.
- Le processus de défaillance correspond alors à un processus de Poisson non homogène (NHPP).

$$\lambda_t = \lambda(t)$$

Le modèle de réparation parfaite ou modèle As Good As New (AGAN)

- Chaque maintenance remet le système à neuf.
- Le processus de défaillance correspond alors à un processus de renouvellement (RP).

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_t})$$

La réalité se situe entre les modèles ABAO et AGAN

Les modèles d'âge virtuel

Après la $i^{\text{ème}}$ panne, le système se comporte comme un système neuf ayant survécu un âge A_i .

$$\forall i \geq 0, \quad \forall t \geq 0 P(X_{i+1} > t | X_1, \dots, X_i) = P(X_1 > A_i + t | X_1 > A_i) = \frac{S(A_i + t)}{S(A_i)}$$

où S est la fonction de survie associée à X_1 .

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_t} + A_{N_t})$$

Les A_i sont appelés **âge effectifs**. $A_0 = 0$.

- ABAO : $A_i = T_i$
- AGAN : $A_i = 0$
- Le modèle de réduction arithmétique de l'âge (ARA_1) :

$$A_i = (1 - \rho)T_i$$

ρ est appelé **facteur d'amélioration** ou **efficacité de maintenance** :

Nécessité d'adapter les âges effectifs aux intensités non croissantes

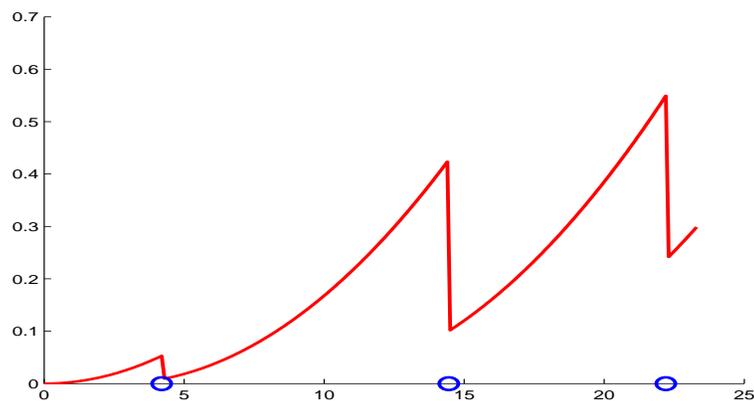


FIG. 1 - modèle ARA et intensité croissante ($\rho = 0.5$)

Usure intrinsèque du système

⇒ Les réparations sont efficaces.

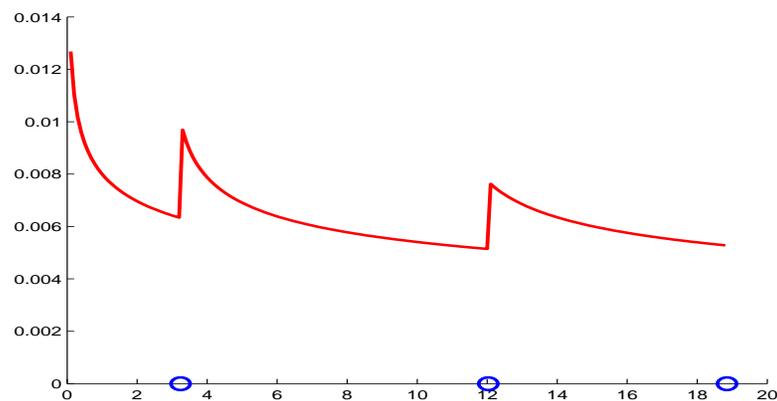


FIG. 2 - modèle ARA et intensité décroissante ($\rho = 0.5$)

Le système s'améliore au cours du temps.

⇒ Les réparations sont nuisibles.

Les intensités en baignoire

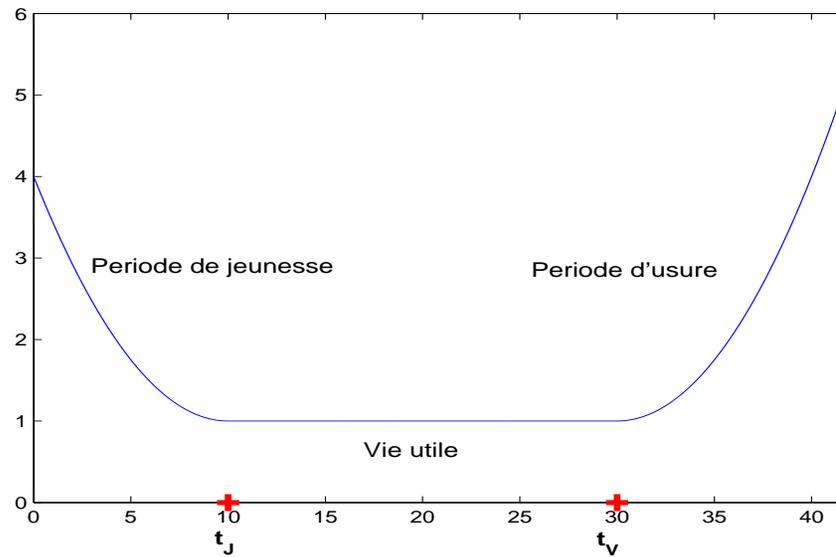


FIG. 3 – Exemple de courbe en baignoire

- Période de jeunesse : $[0; t_J]$: Système en r dage : λ décroissant.
- Période de vie utile : $]t_J; t_V[$: λ constant.
- Période d'usure du système : $]t_V; \infty[$: λ croissant.
- Continuité de l'intensité en t_J et t_V .

Intensité non bornée avec vie utile

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda + \alpha_J \beta_J (t_J - t)^{\beta_J - 1} & \text{si } t \leq t_J \\ \lambda & \text{si } t_J < t < t_V \\ \lambda + \alpha_V \beta_V (t - t_V)^{\beta_V - 1} & \text{si } t_V \leq t \end{cases}$$

$$\lambda, \alpha_J, \alpha_V \geq 0 \quad \beta_V > 1 \quad \beta_J > 1$$

- λ : Fréquence des pannes durant la période de vie utile.
- β_V : Interprétation classique en terme de PLP.
- β_J : Interprétation inhabituelle.

⇒ Associé à des maintenances ARA_1 à partir de la période de vie utile, mise en évidence d'un allongement de la vie utile.

Intensité non bornée sans vie utile

– **Simplification du premier modèle :**

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda + \alpha_J \beta_J (t_J - t)^{\beta_J - 1} & \text{si } t \leq t_J \\ \lambda + \alpha_V \beta_V (t - t_J)^{\beta_V - 1} & \text{si } t_J \leq t \end{cases} \quad (1)$$

$\lambda, \alpha_J, \alpha_V \geq 0, \beta_J, \beta_V > 1$, et $t_J > 0$.

– **Courbe bisectionnelle de type Weibull :**

$$\lambda(t) = \begin{cases} \beta_J \left(\frac{t}{\eta_J}\right)^{\beta_J - 1} & \text{si } t \leq t_J \\ \beta_V \left(\frac{t}{\eta_V}\right)^{\beta_V - 1} & \text{si } t_J \leq t \end{cases} \quad (2)$$

- $t_J = \left(\frac{\beta_V \eta_J^{\beta_J - 1}}{\beta_J \eta_V^{\beta_V - 1}}\right)^{\frac{1}{\beta_J - \beta_V}}$

- $\lambda, \alpha_J, \alpha_V \geq 0, \beta_J < 1, \beta_V > 1$ et $t_J > 0$.

Intensité non bornée sans vie utile

Courbe définie par Idée :

$$\lambda(t, \epsilon, \eta) = \frac{1}{\eta} \left[1 - \epsilon \frac{1 + \ln\left(\frac{t}{\eta}\right)}{1 + \epsilon \frac{t}{\eta} \ln\left(\frac{t}{\eta}\right)} \right] \quad (3)$$

- $\eta > 0$,
- $\epsilon \in [0, 1]$
- Ne dépend que de 2 paramètres.
- Borné à l'infini.
- Loi exponentielle pour $\epsilon=0$

→ Perturbation d'un modèle exponentiel de paramètre η .

Formes de l'intensité

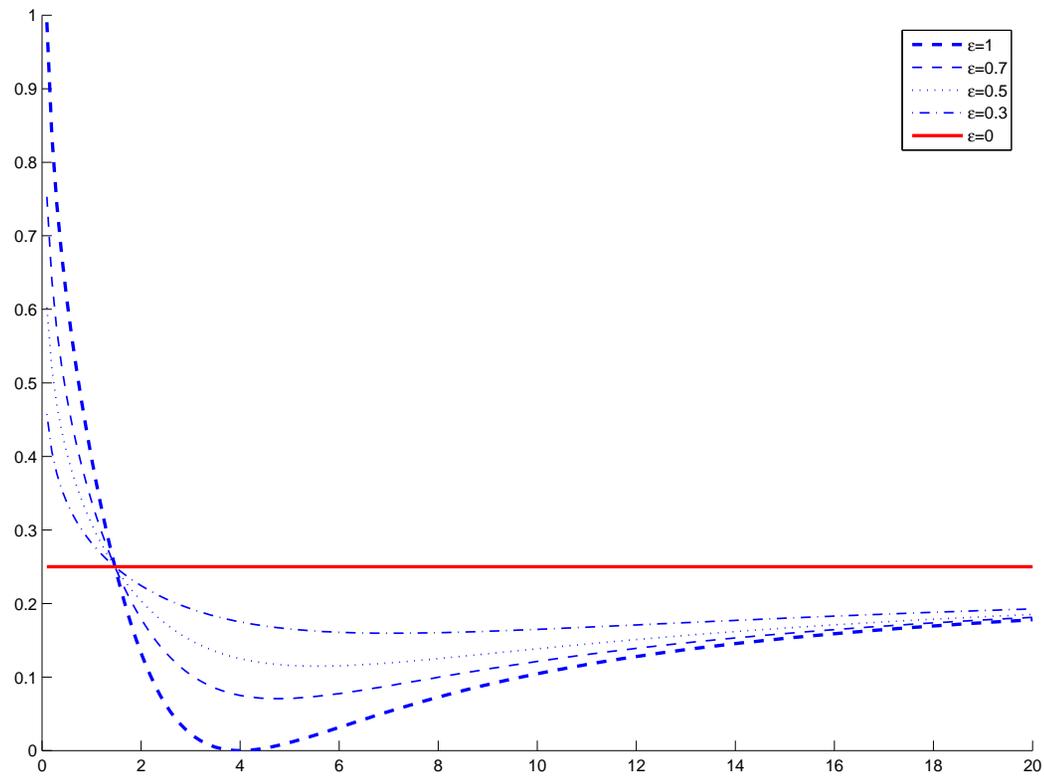


FIG. 4 - Exemple d'intensités

Intensité cumulée

$$\Lambda(t, \epsilon, \eta) = \frac{t}{\eta} - \ln\left(1 + \epsilon \frac{t}{\eta} \ln\left(\frac{t}{\eta}\right)\right) \quad (4)$$

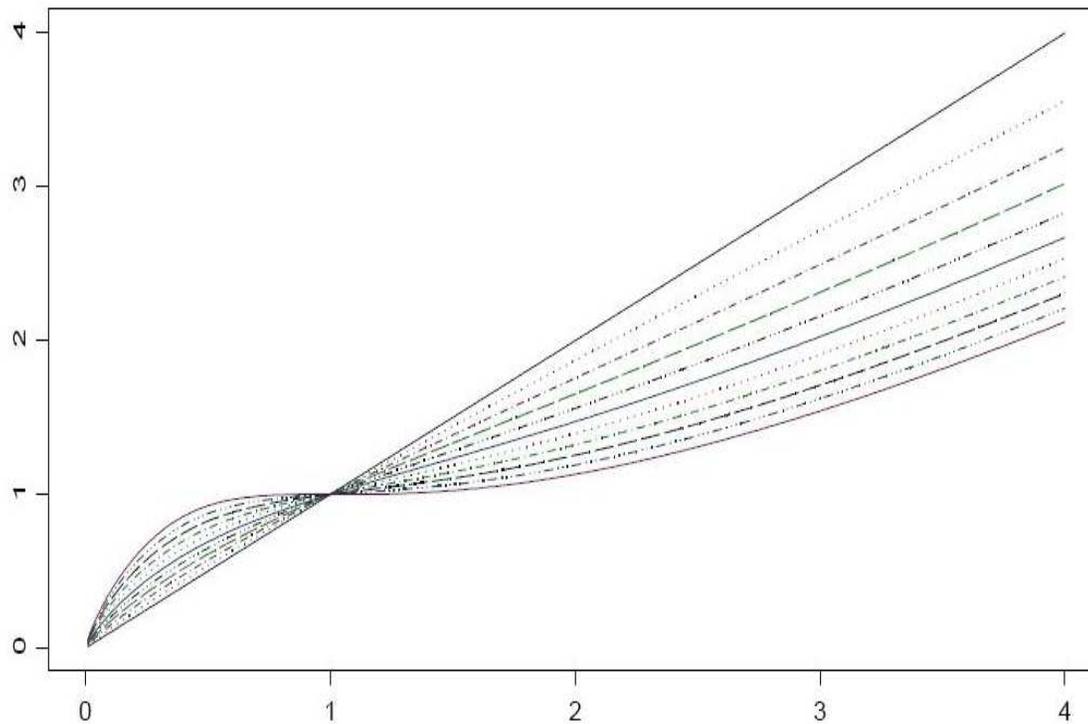


FIG. 5 – Exemple d'intensités

Comment a été obtenu ce résultat (1/2)

- La loi exponentielle est regardée comme une loi de Weibull dont le paramètre de forme égal à 1 subit une perturbation aléatoire z de densité f .
- La fiabilité s'écrit :

$$R(t, \epsilon, \eta) = \int_0^a e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{1-z}} f(z) dz \quad (5)$$

$$- 0 < a < 1$$

$$- E[Z] = \epsilon$$

Comment a été obtenu ce résultat (2/2)

- Cette fiabilité est approchée par l'intégrale en z de la partie principale du DL en z au voisinage de 0 à l'ordre 1 de la fonction
- La fiabilité s'écrit :

$$\begin{aligned} R(t, \epsilon, \eta) &= e^{-\frac{t}{\eta}} \left(1 + \epsilon \frac{t}{\eta} \ln\left(\frac{t}{\eta}\right) \right) \\ &= (1 - \epsilon) e^{-\frac{t}{\eta}} + \epsilon e^{-\frac{t}{\eta}} \left(1 + \frac{t}{\eta} \ln\left(\frac{t}{\eta}\right) \right) \end{aligned} \tag{6}$$

Caractéristiques du modèle (1/2)

- Le paramètre ϵ est la variation moyenne que subit le paramètre de forme.
- Le paramètre ϵ est le paramètre du mélange de lois.
- Le paramètre η est le quantile d'ordre $1 - 1/e$ du mélange.
- Il n'y a pas d'expression explicite du minimum de l'intensité en baignoire, t_J solution de l'équation :

$$\frac{1}{\epsilon} = u(1 + \ln(u) + \ln^2(u)) \quad u = \frac{t_J}{\eta} \quad (7)$$

Caractéristiques du modèle (2/2)

$$f(t, \epsilon, \eta) = (1 - \epsilon) \frac{e^{-\frac{t}{\eta}}}{\eta} + \epsilon \frac{(-1 + \frac{t}{\eta}) \ln(\frac{t}{\eta}) e^{-\frac{t}{\eta}}}{\eta} \quad (8)$$

$$E[T] = \eta(1 + \epsilon\Psi'(2)) \approx \eta(1 + 0.42\epsilon) \quad (9)$$

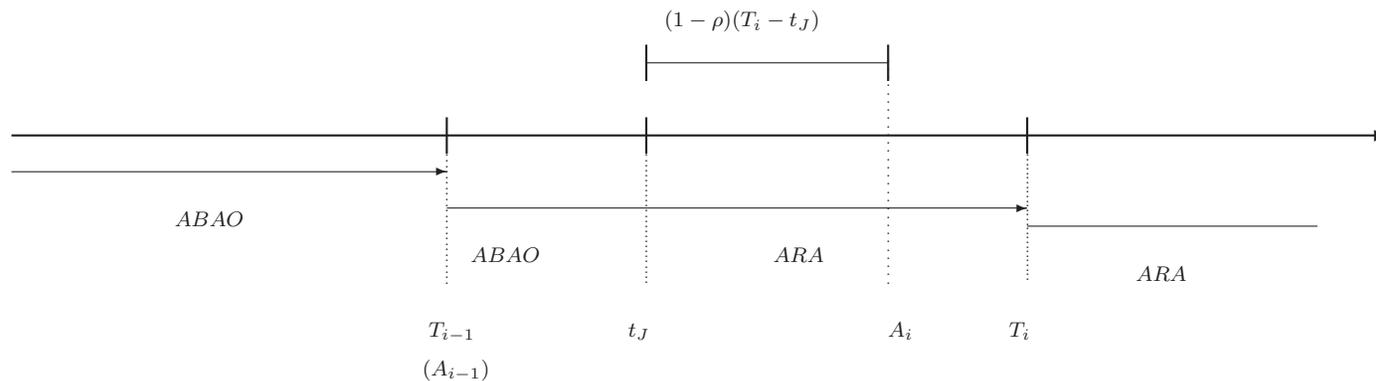
$$\Psi'(x) = [\ln(\Gamma(x))]' \quad (10)$$

$$V(t) \approx \eta^2(1 + 2.84\epsilon - 0.18\epsilon^2) \quad (11)$$

$$t \geq 0 \quad \eta > 0 \quad 0 \leq \epsilon \leq 1.$$

Premier modèle : ABAO-ARA(ρ)

- Période de jeunesse : CM ABAO : $A_n = T_n$
- Durant la vie utile et période d'usure : CM ARA_1 : $A_n = A_{n-1} + (1 - \rho)X_n$
- Première maintenance pendant la vie utile : effet ARA_1 uniquement sur le temps écoulé depuis t_J : $A_n = t_J + (1 - \rho)(T_n - t_J)$



$$A_n = \begin{cases} T_n & \text{si } T_n \leq t_J \\ T_n - \rho(T_n - t_J) & \text{sinon} \end{cases} \quad (12)$$

Second modèle $ARA(\rho)$ - $ARA(\rho)$

Période de jeunesse

- Effets similaires à un modèle ARA_1 pour intensité décroissante.
- $A_1 = T_1 + \rho(t_J - T_1)$
- Même signification du paramètre ρ .

Période d'usure

- Efficacité ARA_1 des maintenances.
- Même facteur d'amélioration ρ

Avec p maintenances en période de jeunesse :

$$A_n = \begin{cases} T_n + \sum_{i=0}^{n-1} \rho(1-\rho)^i(t_J - T_{n-i}) & \text{si } n \leq p \\ t_J + (1-\rho)\left(\sum_{i=0}^{p-1} \rho(1-\rho)^i(t_J - T_{p-i})\right) + T_n - t_J & \text{sinon} \end{cases} \quad (13)$$

Troisième modèle $ARA(\rho_J)$ - $ARA(\rho_V)$

→ les effets de la maintenances diffèrent selon la période. Efficacité ρ_J en période de jeunesse et ρ_V ensuite. Avec p maintenances en période de jeunesse :

$$A_n = \begin{cases} T_n + \sum_{i=0}^{n-1} \rho_J (1 - \rho_J)^i (t_J - T_{n-i}) & \text{si } n \leq p \\ t_J + (1 - \rho_V) \left(\sum_{i=0}^{p-1} \rho_J (1 - \rho_J)^i (t_J - T_{p-i}) + T_n - t_J \right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (14)$$

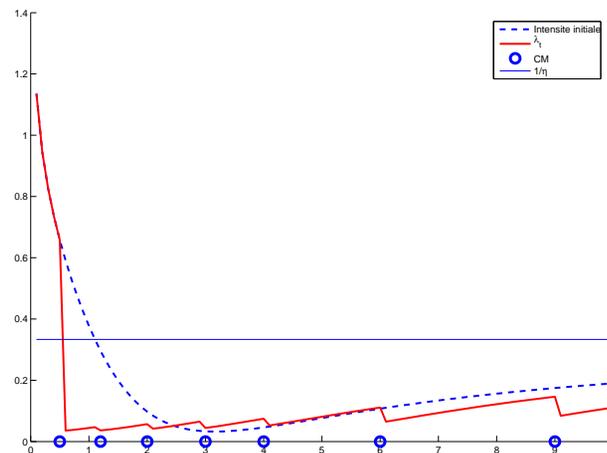


FIG. 6 – Trajectoire d'intensité avec maintenances $ARA(0.5)$ - $ARA(0.5)$

Généralisation en présence de deux types de maintenances

$$\underline{ARA_1(\rho_J, \rho_J) - ARA_1(\rho_V, \rho_V)}$$

MC et MP ont la même efficacité, qui varie entre période de jeunesse (ρ_J) et période d'usure (ρ_V).

$$\underline{ARA_1(\rho_{c,J}, \rho_{p,J}) - ARA_1(\rho_{c,V}, \rho_{p,V})}$$

MC et MP ont des efficacités différentes qui varient suivant les périodes.

⇒ Les âges effectifs ont toujours une écriture explicite.

Construction d'un modèle complet

1. Choix d'une intensité en baignoire adaptée aux données étudiées.
2. Choix d'efficacité en fonction du type de maintenance effectué.

⇒ En présence de MC seules ou de MC et MP déterministes, il est possible de calculer la fonction de vraisemblance associée aux données afin de faire de l'estimation.

Application à des données réelles I

Données

- Composant d'une unité de production électrique soumis à des MC et MP déterministes.
- 17 systèmes similaires et indépendants étudiés sur 15 ans : 16 MP, 12 MC et présence de censure.
- Mise en évidence d'une période de jeunesse estimée par avis d'expert à 1000 jours.

Choix d'un modèle

- Intensité Idée : pas de fortes dégradations, peu de paramètres du modèle, différenciation des MC et MP.
- Efficacité de la maintenance $ARA_1(\rho_J, \rho_J) - ARA_1(\rho_V, \rho_V)$: efficacités de la maintenance en période de jeunesse et d'usure différentes.

Application à des données réelles II

Estimations

$\hat{\rho}_j = 0.49$	$\hat{\rho}_v = 0.99$	$\hat{\epsilon} = 0.89$	$\hat{\eta} = 1113$
-----------------------	-----------------------	-------------------------	---------------------

Analyse

- Période de jeunesse prononcée.
- $\hat{t}_J = 1174$.
- Durée de période de jeunesse divisé par deux.
- Maintenances presque parfaites en période d'usure.

Conclusions

- Mise en évidence des limites des modèles classiques pour des intensités en baignoire.
- Proposition de différentes classes d'intensités en baignoire
- Présentation de l'intensité Idée et des ses principales caractéristiques.
- Proposition de différentes efficacités possibles de la maintenance
- Application d'un modèle à un jeu de données réelles.