

Modélisation de la fiabilité en temps discret par modèles graphiques de durée

Roland Donat Laurent Bouillaut Patrice Aknin
Philippe Leray

INRETS

Laboratoire des Technologies Nouvelles

INSA de Rouen

Laboratoire d'Informatique, de Traitement de l'Information et des Systèmes

Groupe de travail FIMA, 15 mai 2008

Plan de la présentation

- 1 Réseaux bayésiens
- 2 Modèles graphiques de durée
- 3 Inférence dans les MGD
- 4 Application

Introduction aux modèles de durée

- **Objectifs généraux**
 - Modélisation des durées avant l'apparition d'événements spécifiques
 - Modélisation des transitions entre événements

Introduction aux modèles de durée

- **Objectifs généraux**
 - Modélisation des durées avant l'apparition d'événements spécifiques
 - Modélisation des transitions entre événements
- **Quelques applications :**
 - Économie, e.g. durée des épisodes de chômage dans une population
 - Finance, e.g. durée entre l'acceptation d'un prêt et le 1^{er} défaut de remboursement
 - Génétique, e.g. transition entre les nucléotides dans une séquence ADN
 - **Fiabilité/Analyse de survie**, e.g. durée avant défaillance, transition entre les états d'un système

Introduction aux modèles de durée

- **État de l'art :**

- Modèles à taux de défaillance proportionnels (Kay 1977)
 - ⇒ description du contexte, événement unique, distribution des durées variées
- Processus markovien (Gilks 1995)
 - ⇒ système multi-états, durées à distributions exponentielles
- Processus semi-markovien (Barbu et al. 2004)
 - ⇒ système multi-états, durées à distributions quelconques

Introduction aux modèles de durée

- **État de l'art :**

- Modèles à taux de défaillance proportionnels (Kay 1977)
 - ⇒ description du contexte, événement unique, distribution des durées variées
- Processus markovien (Gilks 1995)
 - ⇒ système multi-états, durées à distributions exponentielles
- Processus semi-markovien (Barbu et al. 2004)
 - ⇒ système multi-états, durées à distributions quelconques

- **Notre approche :**

- Utiliser les réseaux bayésiens pour la représentation de modèles de durée

Réseaux bayésiens (RB)

- 1 Réseaux bayésiens
 - RB statiques
 - RB dynamiques

RB statiques

Définition

Definition ((Pearl 1988))

Un RB \mathcal{M} représente la distribution d'une séquence de variables aléatoires (v.a.) $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$. \mathcal{M} est un couple $(\mathcal{G}, (\mathcal{L}_n)_{1 \leq n \leq N})$ où :

- $\mathcal{G} = (\mathbf{X}, \mathcal{E})$: Graphe orienté sans circuit
- ⇒ $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$: Suite de v.a.
- ⇒ \mathcal{E} : Ensemble d'arcs caractérisant les dépendances entre v.a.
- $(\mathcal{L}_n)_{1 \leq n \leq N}$: Suite de lois de probabilité conditionnelles (LPC)
- ⇒ $P(X_n | \mathbf{X}_{\text{pa}_n})$: LPC de X_n sachant ses parents \mathbf{X}_{pa_n} dans \mathcal{G}

RB statiques

Définition

Definition ((Pearl 1988))

Un RB \mathcal{M} représente la distribution d'une séquence de variables aléatoires (v.a.) $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$. \mathcal{M} est un couple $(\mathcal{G}, (\mathcal{L}_n)_{1 \leq n \leq N})$ où :

- $\mathcal{G} = (\mathbf{X}, \mathcal{E})$: Graphe orienté sans circuit
- ⇒ $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$: Suite de v.a.
- ⇒ \mathcal{E} : Ensemble d'arcs caractérisant les dépendances entre v.a.
- $(\mathcal{L}_n)_{1 \leq n \leq N}$: Suite de lois de probabilité conditionnelles (LPC)
- ⇒ $P(X_n | \mathbf{X}_{\text{pa}_n})$: LPC de X_n sachant ses parents \mathbf{X}_{pa_n} dans \mathcal{G}

X

W

Y

Z

RB statiques

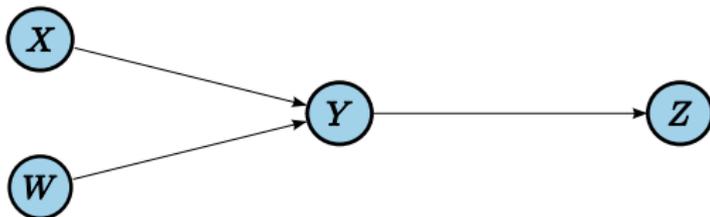
Définition

Definition ((Pearl 1988))

Un RB \mathcal{M} représente la distribution d'une séquence de variables aléatoires (v.a.) $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$. \mathcal{M} est un couple

$(\mathcal{G}, (\mathcal{L}_n)_{1 \leq n \leq N})$ où :

- $\mathcal{G} = (\mathbf{X}, \mathcal{E})$: Graphe orienté sans circuit
- ⇒ $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$: Suite de v.a.
- ⇒ \mathcal{E} : Ensemble d'arcs caractérisant les dépendances entre v.a.
- $(\mathcal{L}_n)_{1 \leq n \leq N}$: Suite de lois de probabilité conditionnelles (LPC)
- ⇒ $P(X_n | \mathbf{X}_{pa_n})$: LPC de X_n sachant ses parents \mathbf{X}_{pa_n} dans \mathcal{G}



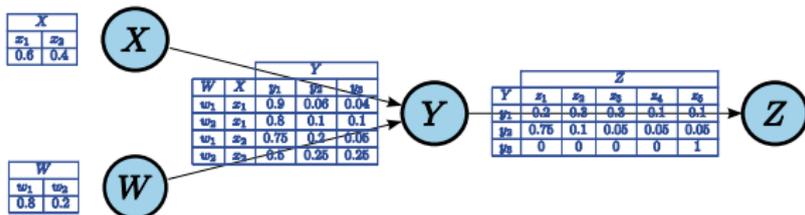
RB statiques

Définition

Definition ((Pearl 1988))

Un RB \mathcal{M} représente la distribution d'une séquence de variables aléatoires (v.a.) $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$. \mathcal{M} est un couple $(\mathcal{G}, (\mathcal{L}_n)_{1 \leq n \leq N})$ où :

- $\mathcal{G} = (\mathbf{X}, \mathcal{E})$: Graphe orienté sans circuit
- ⇒ $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$: Suite de v.a.
- ⇒ \mathcal{E} : Ensemble d'arcs caractérisant les dépendances entre v.a.
- $(\mathcal{L}_n)_{1 \leq n \leq N}$: Suite de lois de probabilité conditionnelles (LPC)
- ⇒ $P(X_n | \mathbf{X}_{\text{pa}_n})$: LPC de X_n sachant ses parents \mathbf{X}_{pa_n} dans \mathcal{G}



RB statiques

Propriétés et intérêts

- **Propriétés de la structure graphique :**
 - Représentation parcimonieuse de la loi jointe des v.a.

$$P(X_1, \dots, X_N) = \prod_{n=1}^N P(X_n | \mathbf{x}_{pa_n})$$

- Algorithmes d'inférence et d'apprentissage génériques disponibles (Neapolitan 2003)

RB statiques

Propriétés et intérêts

- **Propriétés de la structure graphique :**
 - Représentation parcimonieuse de la loi jointe des v.a.

$$P(X_1, \dots, X_N) = \prod_{n=1}^N P(X_n | \mathbf{x}_{pa_n})$$

- Algorithmes d'inférence et d'apprentissage génériques disponibles (Neapolitan 2003)
- **Intérêts de la modélisation probabiliste :**
 - Quantification des dépendances entre v.a.
 - Raisonnement dans un contexte incertain

RB statiques

Propriétés et intérêts

- **Propriétés de la structure graphique :**

- Représentation parcimonieuse de la loi jointe des v.a.

$$P(X_1, \dots, X_N) = \prod_{n=1}^N P(X_n | \mathbf{x}_{pa_n})$$

- Algorithmes d'inférence et d'apprentissage génériques disponibles (Neapolitan 2003)

- **Intérêts de la modélisation probabiliste :**

- Quantification des dépendances entre v.a.
- Raisonnement dans un contexte incertain

⇒ Représentation modulaire et concise des connaissances

⇒ Outil de modélisation puissant et intuitif

RB dynamiques

Définition

Definition (RB à 2 tranches de temps, RB-2D, Murphy (2002))

Un RB-2D \mathcal{M}_{2D} définit la distribution d'une suite de v.a. $(\mathbf{X}_t)_{1 \leq t \leq T} = (X_{1,t}, \dots, X_{n,t})_{1 \leq t \leq T}$. \mathcal{M}_{2D} est un couple $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_{\rightarrow})$ où :

- \mathcal{M}_1 est un RB représentant la distribution de \mathbf{X}_1
- $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ est un RB représentant la distribution de $\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}$

RB dynamiques

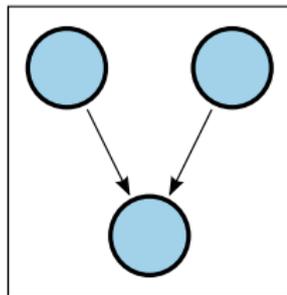
Définition

Definition (RB à 2 tranches de temps, RB-2D, Murphy (2002))

Un RB-2D \mathcal{M}_{2D} définit la distribution d'une suite de v.a.

$(\mathbf{X}_t)_{1 \leq t \leq T} = (X_{1,t}, \dots, X_{n,t})_{1 \leq t \leq T}$. \mathcal{M}_{2D} est un couple $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_{\rightarrow})$ où :

- \mathcal{M}_1 est un RB représentant la distribution de \mathbf{X}_1
- $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ est un RB représentant la distribution de $\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}$



\mathbf{X}_1

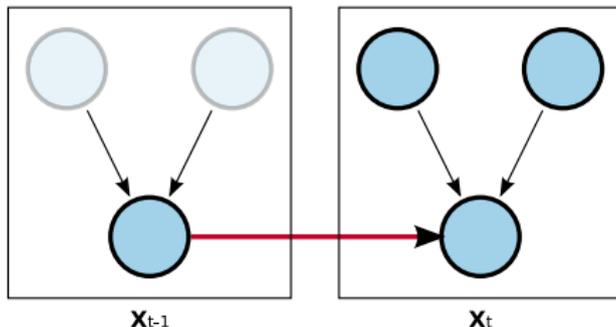
RB dynamiques

Définition

Definition (RB à 2 tranches de temps, RB-2D, Murphy (2002))

Un RB-2D \mathcal{M}_{2D} définit la distribution d'une suite de v.a. $(\mathbf{X}_t)_{1 \leq t \leq T} = (X_{1,t}, \dots, X_{n,t})_{1 \leq t \leq T}$. \mathcal{M}_{2D} est un couple $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_{\rightarrow})$ où :

- \mathcal{M}_1 est un RB représentant la distribution de \mathbf{X}_1
- $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ est un RB représentant la distribution de $\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}$



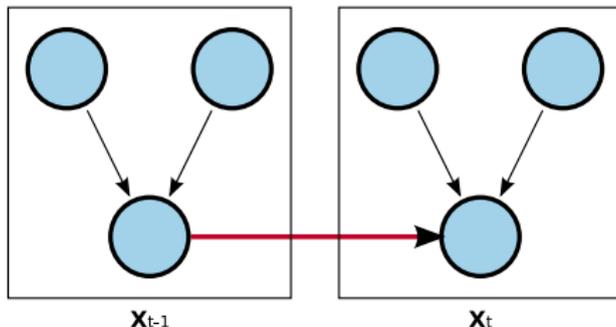
RB dynamiques

Définition

Definition (RB à 2 tranches de temps, RB-2D, Murphy (2002))

Un RB-2D \mathcal{M}_{2D} définit la distribution d'une suite de v.a. $(\mathbf{X}_t)_{1 \leq t \leq T} = (X_{1,t}, \dots, X_{n,t})_{1 \leq t \leq T}$. \mathcal{M}_{2D} est un couple $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_{\rightarrow})$ où :

- \mathcal{M}_1 est un RB représentant la distribution de \mathbf{X}_1
- $\mathcal{M}_{\rightarrow}$ est un RB représentant la distribution de $\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}$



RB dynamiques

Propriétés et intérêts

- **Les RB-2D permettent de représenter tout processus (\mathbf{X}_t) tel que :**
 - t soit à valeurs dans un ensemble dénombrable, e.g. $t \in \mathbb{N}^*$
 - (\mathbf{X}_t) vérifie la propriété de Markov
- ⇒ Le futur est indépendant du passé sachant le présent
(i.e. $\mathbf{X}_{t-1} \perp\!\!\!\perp \mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{X}_t$)

RB dynamiques

Propriétés et intérêts

- **Les RB-2D permettent de représenter tout processus (\mathbf{X}_t) tel que :**
 - t soit à valeurs dans un ensemble dénombrable, e.g. $t \in \mathbb{N}^*$
 - (\mathbf{X}_t) vérifie la propriété de Markov
- ⇒ Le futur est indépendant du passé sachant le présent
(i.e. $\mathbf{X}_{t-1} \perp\!\!\!\perp \mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{X}_t$)
- ⇒ Les RB-2D généralisent de nombreux modèles séquentiels connus : HMM, Filtre de Kalman, ...

RB dynamiques

Propriétés et intérêts

- **Héritage des propriétés des RB statiques**
 - Factorisation de la loi jointe sur une séquence de longueur T :

$$P((\mathbf{X}_t)_{1 \leq t \leq T}) = P(\mathbf{X}_1) \prod_{t=2}^T P(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1})$$

RB dynamiques

Propriétés et intérêts

- **Héritage des propriétés des RB statiques**
 - Factorisation de la loi jointe sur une séquence de longueur T :

$$\begin{aligned} P((\mathbf{X}_t)_{1 \leq t \leq T}) &= P(\mathbf{X}_1) \prod_{t=2}^T P(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}) \\ &= \prod_{n=1}^N P(X_{n,1} | \mathbf{X}_{\text{pa}_{n,1}}) \prod_{t=2}^T \prod_{n=1}^N P(X_{n,t} | \mathbf{X}_{\text{pa}_{n,t}}) \end{aligned}$$

RB dynamiques

Propriétés et intérêts

- **Héritage des propriétés des RB statiques**

- Factorisation de la loi jointe sur une séquence de longueur T :

$$\begin{aligned}
 P((\mathbf{X}_t)_{1 \leq t \leq T}) &= P(\mathbf{X}_1) \prod_{t=2}^T P(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}) \\
 &= \prod_{n=1}^N P(X_{n,1} | \mathbf{X}_{\text{pa}_{n,1}}) \prod_{t=2}^T \prod_{n=1}^N P(X_{n,t} | \mathbf{X}_{\text{pa}_{n,t}})
 \end{aligned}$$

- Apprentissage similaire
- Inférence reposant sur les algorithmes statiques

Modèles graphiques de durée (MGD)

- 2 Modèles graphiques de durée
 - Introduction
 - Modélisation graphique
 - Modélisation probabiliste

Introduction

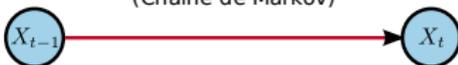
- **Objectifs** : Utiliser le formalisme des RB-2D afin de représenter des modèles de durée
 - multi-états
 - à distributions de temps séjour quelconques
 - possédant des variables contextuelles
- **Approche** : Extension des modèles à variables de durée (Murphy 2002)
- **Hypothèses** :
 - Temps discret
 - Système à états finis et discrets

Modélisation graphique

Variable Symbole Domaine

Modélisation graphique

Modélisation de l'état du système (Chaîne de Markov)

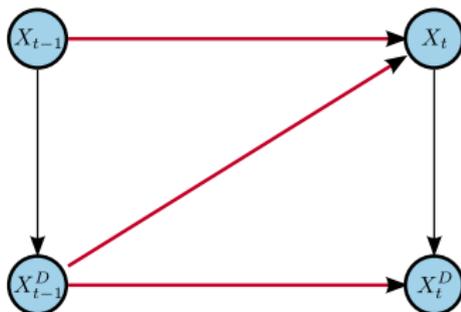


Variable	Symbole	Domaine
État	X_t	$\mathcal{X} = \{1, \dots, k, \dots, K\}$

Modélisation graphique

Modélisation des temps de séjour

- Influence l'état du système suivant
- Dépend de l'état du système courant

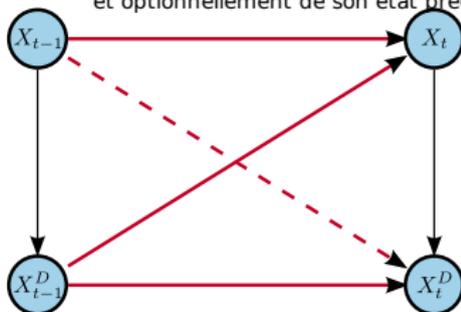


Variable	Symbole	Domaine
État	X_t	$\mathcal{X} = \{1, \dots, k, \dots, K\}$
Durée	X_t^D	$\mathcal{X}^D = \{1, \dots, d, \dots, D\}$

Modélisation graphique

Modélisation des temps de séjour

- Influence l'état du système suivant
- Dépend de l'état du système courant et optionnellement de son état précédent

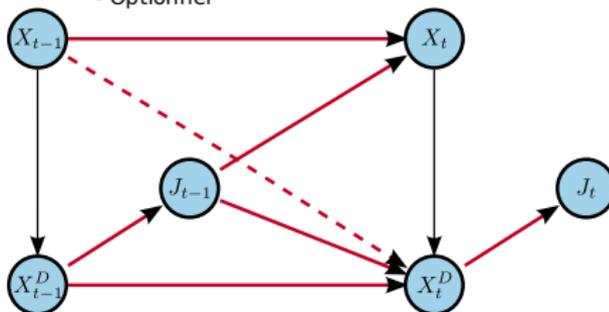


Variable	Symbole	Domaine
État	X_t	$\mathcal{X} = \{1, \dots, k, \dots, K\}$
Durée	X_t^D	$\mathcal{X}^D = \{1, \dots, d, \dots, D\}$

Modélisation graphique

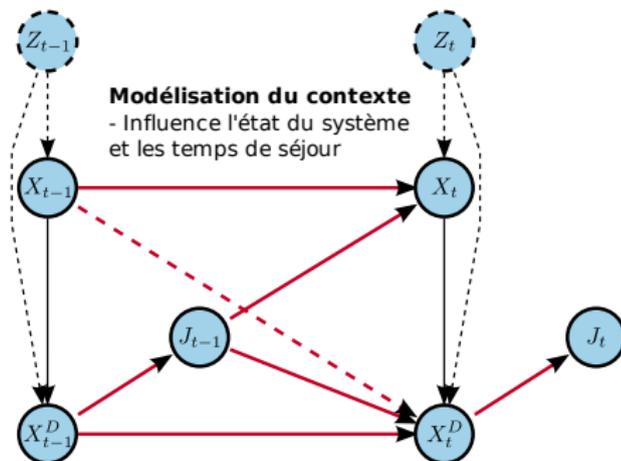
Indicateur de transition

- Utile pour de futures généralisations
- Optionnel



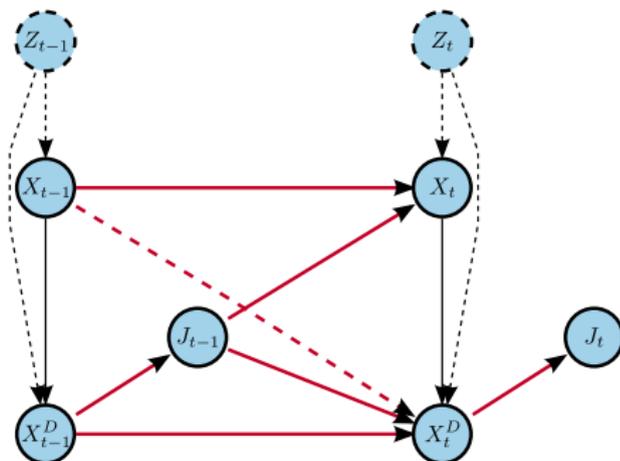
Variable	Symbole	Domaine
État	X_t	$\mathcal{X} = \{1, \dots, k, \dots, K\}$
Durée	X_t^D	$\mathcal{X}^D = \{1, \dots, d, \dots, D\}$
Transition	J_t	$\mathcal{J} = \{0, 1\}$

Modélisation graphique



Variable	Symbole	Domaine
État	X_t	$\mathcal{X} = \{1, \dots, k, \dots, K\}$
Durée	X_t^D	$\mathcal{X}^D = \{1, \dots, d, \dots, D\}$
Transition	J_t	$\mathcal{J} = \{0, 1\}$
Contexte	Z_t	$\mathcal{Z} = \{1, \dots, \ell, \dots, L\}$

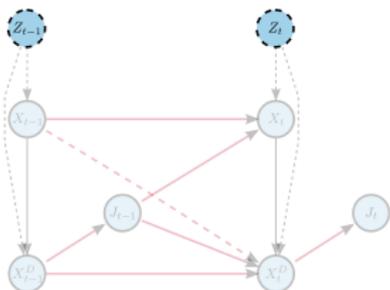
Modélisation graphique



Variable	Symbole	Domaine
État	X_t	$\mathcal{X} = \{1, \dots, k, \dots, K\}$
Durée	X_t^D	$\mathcal{X}^D = \{1, \dots, d, \dots, D\}$
Transition	J_t	$\mathcal{J} = \{0, 1\}$
Contexte	Z_t	$\mathcal{Z} = \{1, \dots, \ell, \dots, L\}$

Distribution a priori

Loi de Z_t (contexte)



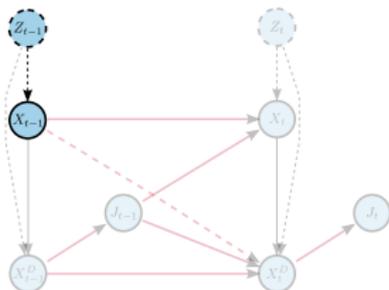
- Probabilité que le système se trouve dans le contexte $\ell \in \mathcal{Z}$ à l'instant t

$$P(Z_t = \ell) = \omega_{t,\ell}$$

- Forme vectorielle : $P(Z_t) = \omega_t$
- Nombre de paramètres : L

Distributions initiales $t = 1$

LPC de X_1 (État initial du système)



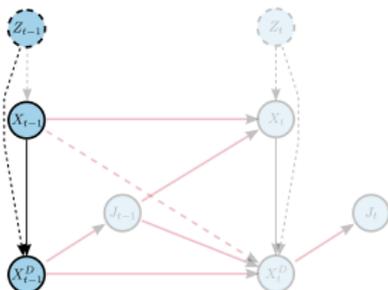
- Probabilité que le système démarre dans le k -ème état sachant que le contexte est ℓ

$$P(\underbrace{X_1 = k}_{\text{état initial}} \mid \underbrace{Z_1 = \ell}_{\text{contexte}}) = V_{1,\ell,k}$$

- Forme vectorielle : $P(X_1|Z_1) = V_1$
- Nombre de paramètres : LK

Distributions initiales $t = 1$

LPC de X_1^D (temps de séjour initiaux)



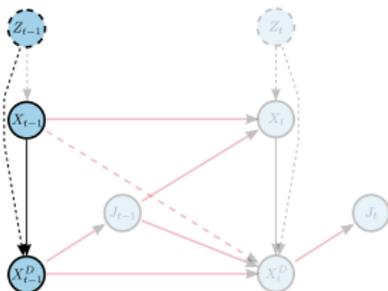
- Probabilité que le système reste durant d unités de temps dans l'état initial k sachant que le contexte est ℓ

$$P(\underbrace{X_1^D = d}_{\text{temps de séjour}} \mid Z_1 = \ell, X_1 = k) = F_{\ell, k, d}^1$$

- Forme vectorielle : $P(X_1^D \mid Z_1, X_1) = F^1$
- Nombre de paramètres : LKD

Distributions initiales $t = 1$

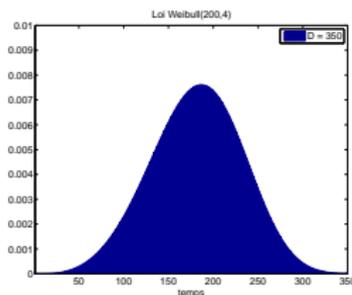
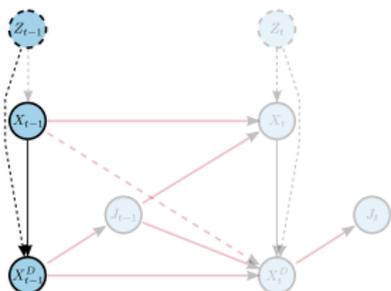
LPC de X_1^D (temps de séjour initiaux)



- D correspond à la durée maximale autorisée dans chaque état du système
- ⇒ Cette borne contrôle également la finesse de discrétisation des lois de temps de séjour

Distributions initiales $t = 1$

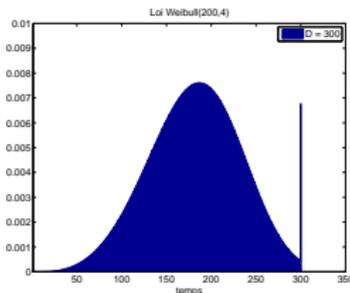
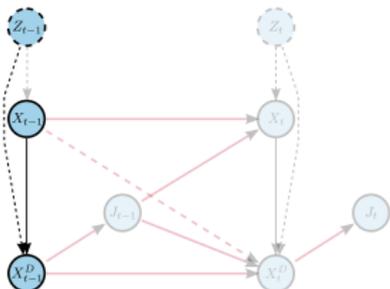
LPC de X_1^D (temps de séjour initiaux)



- D correspond à la durée maximale autorisée dans chaque état du système
- ⇒ Cette borne contrôle également la finesse de discrétisation des lois de temps de séjour
- **Exemple** : représentation d'une loi de Weibull de paramètres $\mu = 200$ et $\gamma = 4$ pour différentes valeurs de D

Distributions initiales $t = 1$

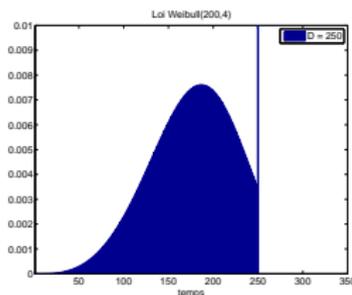
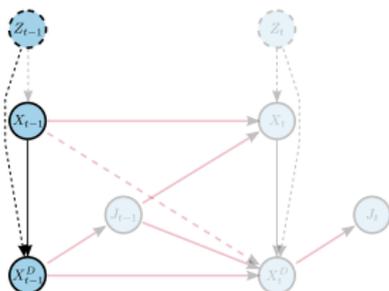
LPC de X_1^D (temps de séjour initiaux)



- D correspond à la durée maximale autorisée dans chaque état du système
- ⇒ Cette borne contrôle également la finesse de discrétisation des lois de temps de séjour
- **Exemple** : représentation d'une loi de Weibull de paramètres $\mu = 200$ et $\gamma = 4$ pour différentes valeurs de D

Distributions initiales $t = 1$

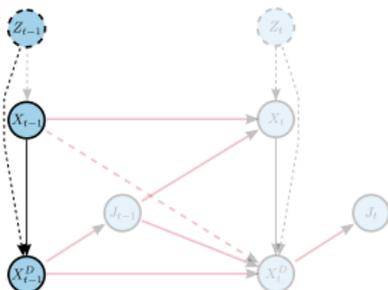
LPC de X_1^D (temps de séjour initiaux)



- D correspond à la durée maximale autorisée dans chaque état du système
- ⇒ Cette borne contrôle également la finesse de discrétisation des lois de temps de séjour
- **Exemple** : représentation d'une loi de Weibull de paramètres $\mu = 200$ et $\gamma = 4$ pour différentes valeurs de D

Distributions initiales $t = 1$

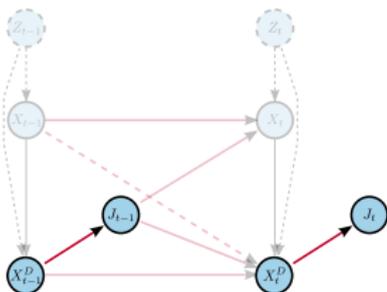
LPC de X_1^D (temps de séjour initiaux)



- D correspond à la durée maximale autorisée dans chaque état du système
- ⇒ Cette borne contrôle également la finesse de discrétisation des lois de temps de séjour
- **Exemple** : représentation d'une loi de Weibull de paramètres $\mu = 200$ et $\gamma = 4$ pour différentes valeurs de D
- **Remarque** : Lorsque $D = 1$, un MGD est équivalent à une chaîne de Markov

Contrôle des transitions

LPC de J_t



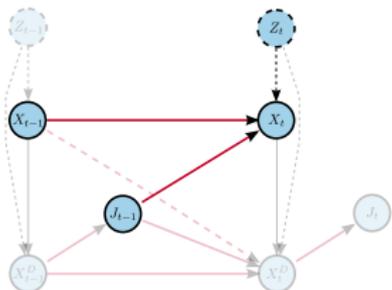
- Une transition est déclenchée lorsque le temps de séjour dans l'état courant est épuisé (i.e. si $X_t^D = 1$)

$$P(J_t = 1 | X_t^D = d) = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Nombre de paramètres : $2D$

Distributions inter tranches de temps $t \geq 2$

LPC de X_t (transition entre états du système)



- Lorsqu'une transition est déclenchée
 $\iff J_{t-1} = 1$

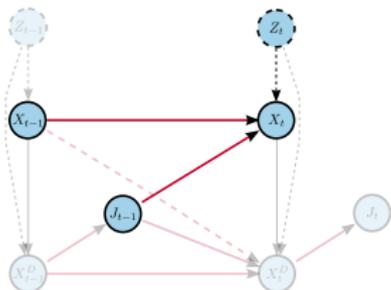
- Probabilité que le système passe de l'état k' à l'état k sachant que le contexte est ℓ

$$P(\underbrace{X_t = k}_{\text{nouvel état}} \mid \underbrace{X_{t-1} = k'}_{\text{état précédent}}, \underbrace{J_{t-1} = 1}_{\text{transition déclenchée}}, Z_t = \ell) = Q_{k', \ell, k}^{\text{sys}}$$

- Q^{sys} : loi de transition intrinsèque du système

Distributions inter tranches de temps $t \geq 2$

LPC de X_t (transition entre états du système)



- Tant qu'il n'y a pas de transition

$$\iff J_{t-1} = 0$$

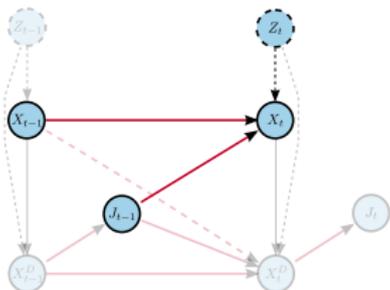
- Le système reste de manière **déterministe** dans l'état précédent k'

$$P(X_t = k | X_{t-1} = k', \underbrace{J_{t-1} = 0}_{\text{aucune transition}}, Z_t = \ell) = I_{k',k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = k' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- I : matrice identité

Distributions inter tranches de temps $t \geq 2$

LPC de X_t (transition entre états du système)



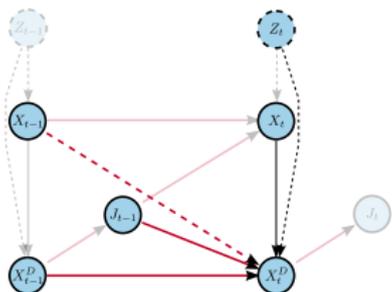
- Forme vectorielle :

$$P(X_t | X_{t-1}, J_{t-1} = j, Z_t) = \begin{cases} I & \text{si } j = 0 \\ Q^{\text{sys}} & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

- Nombre de paramètres : $2LK^2$

Distributions inter tranches de temps $t \geq 2$

LPC de X_t^D (actualisation des temps de séjour)



- Lorsqu'une transition est déclenchée

$$\iff J_{t-1} = 1$$

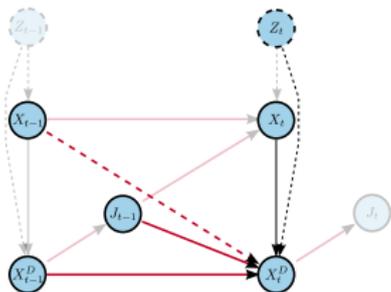
- L'état du système peut changer et un nouveau temps de séjour est tiré aléatoirement

$$P(X_t^D = d | X_{t-1} = k', X_{t-1}^D = d', \underbrace{J_{t-1} = 1}_{\text{transition déclenchée}}, Z_t = \ell, X_t = k) = F_{k', \ell, k, d}^{\rightarrow}$$

- F^{\rightarrow} : loi des temps de séjour

Distributions inter tranches de temps $t \geq 2$

LPC de X_t^D (actualisation des temps de séjour)



- Tant qu'il n'y a pas de transition

$$\iff J_{t-1} = 0$$

- Le temps restant dans l'état courant est décompté d'une unité

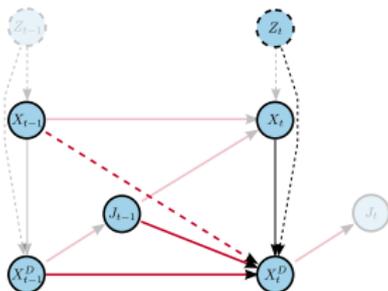
$$P(X_t^D = d | X_{t-1} = k', X_{t-1}^D = d', \underbrace{J_{t-1} = 0}_{\text{pas de transition}}, Z_t = \ell, X_t = k)$$

$$= C_{d',d} = \begin{cases} 1 & \text{si } d = d' - 1 \text{ et } d' \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- C : opérateur de "décomptage"

Distributions inter tranches de temps $t \geq 2$

LPC de X_t^D (actualisation des temps de séjour)



- Forme vectorielle :

$$P(X_t^D | X_{t-1}, X_{t-1}^D, J_{t-1} = j, Z_t, X_t) = \begin{cases} C & \text{si } j = 0 \\ F \rightarrow & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

- Nombre de paramètres : $2LK^2D^2$

⇒ Problème de stockage et de manipulation lorsque K et/ou D sont grands

Inférence dans les MGD

- 3 Inférence dans les MGD
 - Objectif
 - Méthode approchée
 - Méthodes exactes
 - Comparaison des méthodes d'inférence

Que veut-on calculer ?

- **Contexte** ; Étude d'un système dont la dynamique est modélisée par un MGD

Que veut-on calculer ?

- **Contexte** ; Étude d'un système dont la dynamique est modélisée par un MGD
- **Objectif** : Déterminer la probabilité d'occurrence d'une séquence d'états quelconque
- **Formellement** : Calculer

$$P(X_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, X_T \in \mathcal{S}_T)$$

où $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{X}, \dots, \mathcal{S}_T \subseteq \mathcal{X}$

Que veut-on calculer ?

- **Contexte** ; Étude d'un système dont la dynamique est modélisée par un MGD
- **Objectif** : Déterminer la probabilité d'occurrence d'une séquence d'états quelconque
- **Formellement** : Calculer

$$P(X_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, X_T \in \mathcal{S}_T)$$

où $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{X}, \dots, \mathcal{S}_T \subseteq \mathcal{X}$

- **Méthodes de calcul** :
 - Inférence approchée type MCMC
 - Inférence exacte générique
 - Inférence exacte *ad hoc*

Inférence approchée

Échantillonnages

Principe

- Générer n réalisations i.i.d. de séquences de longueur T à partir du MGD
- Estimer la probabilité désirée

Inférence approchée

Échantillonnages

Principe

- Générer n réalisations i.i.d. de séquences de longueur T à partir du MGD
- Estimer la probabilité désirée

Exemple de séquence simulée

t	1	2	3	...	49	50	51	52	53	54	...
X_t	ok	ok	ok	...	ok	ok	dég.	dég.	dég.	déf.	...
X_t^D	50	49	48	...	2	1	3	2	1	∞	...
J_t	non	non	non	...	non	oui	non	non	oui	non	...

Inférence approchée

Échantillonnages

Principe

- Générer n réalisations i.i.d. de séquences de longueur T à partir du MGD
- Estimer la probabilité désirée

Exemple de séquence simulée

t	1	2	3	...	49	50	51	52	53	54	...
X_t	ok	ok	ok	...	ok	ok	dég.	dég.	dég.	déf.	...
X_t^D	50	49	48	...	2	1	3	2	1	∞	...
J_t	non	non	non	...	non	oui	non	non	oui	non	...

Bilan

- Simple à réaliser
- Peu sensible à la complexité du modèle
- Vitesse de convergence des estimateurs très lente

Méthodes exactes

Interface + élimination - Principe

Propriété (Interface dans un MGD)

Soit $(Z_t, X_t, X_t^D, J_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ un processus représenté par un MGD. Ce dernier vérifie alors

$$\underbrace{\left[Z_{t-1}, X_{t-1}, X_{t-1}^D, J_{t-1}, Z_t \right]}_{\text{passé}} \perp\!\!\!\perp \underbrace{\left[J_t, Z_{t+1}, X_{t+1}, X_{t+1}^D \right]}_{\text{futur}} \mid \underbrace{\left[X_t, X_t^D \right]}_{\text{présent}} \quad (1)$$

Principe

- Exploiter la propriété de l'interface pour faire les calculs d'une tranche de temps à l'autre
- Utiliser l'algorithme d'élimination pour les calculs de probabilité (Dechter 1999)

Méthodes exactes

Interface + élimination - Algorithme

Entrée(s): Une séquence d'états $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{X}, \dots, \mathcal{S}_T \subseteq \mathcal{X}$

Sortie(s): $P(X_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, X_T \in \mathcal{S}_T)$

Méthodes exactes

Interface + élimination - Algorithme

Entrée(s): Une séquence d'états $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{X}, \dots, \mathcal{S}_T \subseteq \mathcal{X}$

Sortie(s): $P(X_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, X_T \in \mathcal{S}_T)$

1: Calculer la distribution initiale de l'interface

$$P(X_1, X_1^D) = \sum_{Z_1} P(Z_1, X_1, X_1^D)$$

Méthodes exactes

Interface + élimination - Algorithme

Entrée(s): Une séquence d'états $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{X}, \dots, \mathcal{S}_T \subseteq \mathcal{X}$

Sortie(s): $P(X_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, X_T \in \mathcal{S}_T)$

1: Calculer la distribution initiale de l'interface

$$P(X_1, X_1^D) = \sum_{Z_1} \underbrace{P(Z_1)P(X_1|Z_1)P(X_1^D|Z_1, X_1)}_{\text{Factorisation dans le MGD}}$$

Méthodes exactes

Interface + élimination - Algorithme

Entrée(s): Une séquence d'états $S_1 \subseteq \mathcal{X}, \dots, S_T \subseteq \mathcal{X}$

Sortie(s): $P(X_1 \in S_1, \dots, X_T \in S_T)$

1: Calculer la distribution initiale de l'interface

$$P(X_1, X_1^D) = \sum_{Z_1} P(Z_1)P(X_1|Z_1)P(X_1^D|Z_1, X_1)$$

2: En déduire $P(X_1 \in S_1) = \sum_{X_1^D} \sum_{X_1 \in S_1} P(X_1, X_1^D)$

Méthodes exactes

Interface + élimination - Algorithme

Entrée(s): Une séquence d'états $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{X}, \dots, \mathcal{S}_T \subseteq \mathcal{X}$

Sortie(s): $P(X_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, X_T \in \mathcal{S}_T)$

1: Calculer la distribution initiale de l'interface

$$P(X_1, X_1^D) = \sum_{Z_1} P(Z_1)P(X_1|Z_1)P(X_1^D|Z_1, X_1)$$

2: En déduire $P(X_1 \in \mathcal{S}_1) = \sum_{X_1^D} \sum_{X_1 \in \mathcal{S}_1} P(X_1, X_1^D)$

3: **Pour** $t = 2$ to T **Faire**

4: Calculer la distribution de l'interface à l'instant t de la séquence

$$P(X_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, X_{t-1} \in \mathcal{S}_{t-1}, X_t, X_t^D)$$

Méthodes exactes

Interface + élimination - Algorithme

Entrée(s): Une séquence d'états $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{X}, \dots, \mathcal{S}_T \subseteq \mathcal{X}$

Sortie(s): $P(X_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, X_T \in \mathcal{S}_T)$

- 1: Calculer la distribution initiale de l'interface

$$P(X_1, X_1^D) = \sum_{Z_1} P(Z_1)P(X_1|Z_1)P(X_1^D|Z_1, X_1)$$

- 2: En déduire $P(X_1 \in \mathcal{S}_1) = \sum_{X_1^D} \sum_{X_1 \in \mathcal{S}_1} P(X_1, X_1^D)$

- 3: **Pour** $t = 2$ to T **Faire**

- 4: Calculer la distribution de l'interface à l'instant t de la séquence

$$P(X_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, X_{t-1} \in \mathcal{S}_{t-1}, X_t, X_t^D)$$

- 5: En déduire la probabilité de la séquence à l'instant t

$$P(X_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, X_t \in \mathcal{S}_t) = \sum_{X_t^D} \sum_{X_t \in \mathcal{S}_t} P(X_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, X_{t-1} \in \mathcal{S}_{t-1}, X_t, X_t^D)$$

- 6: **Fin Pour**

Méthodes exactes

Interface + élimination - Calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$P(X_t, X_t^D) = \sum_{\substack{(Z_\tau, X_\tau)_{1 \leq \tau < t} \\ (X_\tau^D, J_\tau)_{1 \leq \tau < t} \\ Z_t}} P((Z_\tau, X_\tau, X_\tau^D, J_\tau)_{1 \leq \tau < t}, Z_t, X_t, X_t^D)$$

Méthodes exactes

Interface + élimination - Calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$\begin{aligned}
 P(X_t, X_t^D) &= \sum_{\substack{(Z_\tau, X_\tau)_{1 \leq \tau < t} \\ (X_\tau^D, J_\tau)_{1 \leq \tau < t} \\ Z_t}} P((Z_\tau, X_\tau, X_\tau^D, J_\tau)_{1 \leq \tau < t}, Z_t, X_t, X_t^D) \\
 &= \sum_{\substack{X_{t-1}, X_{t-1}^D \\ J_{t-1}, Z_t}} \underbrace{P(J_{t-1}, Z_t, X_t, X_t^D | X_{t-1}, X_{t-1}^D)}_{\text{propriété de l'interface}} P(X_{t-1}, X_{t-1}^D)
 \end{aligned}$$

Méthodes exactes

Interface + élimination - Calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$\begin{aligned}
 P(X_t, X_t^D) &= \sum_{\substack{(Z_\tau, X_\tau)_{1 \leq \tau < t} \\ (X_\tau^D, J_\tau)_{1 \leq \tau < t} \\ Z_t}} P((Z_\tau, X_\tau, X_\tau^D, J_\tau)_{1 \leq \tau < t}, Z_t, X_t, X_t^D) \\
 &= \sum_{\substack{X_{t-1}, X_{t-1}^D \\ J_{t-1}, Z_t}} \underbrace{P(X_t^D | X_{t-1}, X_{t-1}^D, J_{t-1}, Z_t, X_t)}_{\text{factorisation dans le MGD}} \\
 &\quad \underbrace{P(X_t | X_{t-1}, J_{t-1}, Z_t) P(Z_t) P(J_{t-1} | X_t^D)}_{\text{factorisation dans le MGD}} P(X_{t-1}, X_{t-1}^D)
 \end{aligned}$$

Méthodes exactes

Interface + élimination - Calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$\begin{aligned}
 P(X_t, X_t^D) &= \sum_{\substack{(Z_\tau, X_\tau)_{1 \leq \tau < t} \\ (X_\tau^D, J_\tau)_{1 \leq \tau < t} \\ Z_t}} P((Z_\tau, X_\tau, X_\tau^D, J_\tau)_{1 \leq \tau < t}, Z_t, X_t, X_t^D) \\
 &= \sum_{Z_t} P(Z_t) \sum_{X_{t-1}, J_{t-1}} P(X_t | X_{t-1}, J_{t-1}, Z_t) \sum_{X_{t-1}^D} P(J_{t-1} | X_t^D) \\
 &\quad P(X_t^D | X_{t-1}, X_{t-1}^D, J_{t-1}, Z_t, X_t) P(X_{t-1}, X_{t-1}^D)
 \end{aligned}$$

Méthodes exactes

Interface + élimination - Calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$\begin{aligned}
 P(X_t, X_t^D) &= \sum_{\substack{(Z_\tau, X_\tau)_{1 \leq \tau < t} \\ (X_\tau^D, J_\tau)_{1 \leq \tau < t} \\ Z_t}} P((Z_\tau, X_\tau, X_\tau^D, J_\tau)_{1 \leq \tau < t}, Z_t, X_t, X_t^D) \\
 &= \sum_{Z_t} P(Z_t) \sum_{X_{t-1}, J_{t-1}} P(X_t | X_{t-1}, J_{t-1}, Z_t) \sum_{X_{t-1}^D} P(J_{t-1} | X_t^D) \\
 &\quad P(X_t^D | X_{t-1}, X_{t-1}^D, J_{t-1}, Z_t, X_t) P(X_{t-1}, X_{t-1}^D)
 \end{aligned}$$

Problème de complexité

- Opérations entre LPC difficiles dès que K et/ou D sont grands
- **Problème** : en pratique, D est souvent grand

Méthodes exactes

Interface + élimination - Bilan

Bilan

- Algorithme générique, i.e. valable pour tout RB-2D
- Méthode exacte
- Complexité très sensible au nombre d'états du système (K) et à la précision des lois de temps de séjour (D)

Méthodes exactes

Interface + élimination - Bilan

Bilan

- Algorithme générique, i.e. valable pour tout RB-2D
- Méthode exacte
- Complexité très sensible au nombre d'états du système (K) et à la précision des lois de temps de séjour (D)

Solution proposée

- Développement d'une méthode *ad hoc*
 - Exploiter les parties déterministes des LPC afin de réduire le nombre d'opérations
- ⇒ Sacrifice de la généralité au profit de l'efficacité
- **Notation vectorielle de l'interface :**
$$\Psi_{t,k,d} = P(X_t = k, X_t^D = d)$$

Méthodes exactes

Méthode ad hoc - Simplification du calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$\begin{aligned} \Psi_t &= \sum_{\substack{X_{t-1}, X_{t-1}^D \\ J_{t-1}, Z_t}} P(X_t^D | X_{t-1}, X_{t-1}^D, J_{t-1}, Z_t, X_t) \\ &P(X_t | X_{t-1}, J_{t-1}, Z_t) P(Z_t) P(J_{t-1} | X_t^D) P(X_{t-1}, X_{t-1}^D) \end{aligned}$$

Méthodes exactes

Méthode ad hoc - Simplification du calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$\begin{aligned} \Psi_t &= \sum_{X_{t-1}, X_{t-1}^D, Z_t} P(X_t^D | X_{t-1}, X_{t-1}^D, J_{t-1} = 0, Z_t, X_t) \\ &P(X_t | X_{t-1}, J_{t-1} = 0, Z_t) P(Z_t) P(J_{t-1} = 0 | X_t^D) P(X_{t-1}, X_{t-1}^D) \\ &+ \sum_{X_{t-1}, X_{t-1}^D, Z_t} P(X_t^D | X_{t-1}, X_{t-1}^D, J_{t-1} = 1, Z_t, X_t) \\ &P(X_t | X_{t-1}, J_{t-1} = 1, Z_t) P(Z_t) P(J_{t-1} = 1 | X_t^D) P(X_{t-1}, X_{t-1}^D) \end{aligned}$$

Méthodes exactes

Méthode ad hoc - Simplification du calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$\begin{aligned}
 \Psi_t = & \sum_{X_{t-1}, X_{t-1}^D, Z_t} \underbrace{P(X_t^D | X_{t-1}, X_{t-1}^D, J_{t-1} = 0, Z_t, X_t)}_C \\
 & \underbrace{P(X_t | X_{t-1}, J_{t-1} = 0, Z_t)}_I \underbrace{P(Z_t)}_{\omega_t} \underbrace{P(J_{t-1} = 0 | X_t^D)}_{\mathbb{1}(X_t^D \geq 2)} \underbrace{P(X_{t-1}, X_{t-1}^D)}_{\Psi_{t-1}} \\
 + & \sum_{X_{t-1}, X_{t-1}^D, Z_t} \underbrace{P(X_t^D | X_{t-1}, X_{t-1}^D, J_{t-1} = 1, Z_t, X_t)}_{F \rightarrow} \\
 & \underbrace{P(X_t | X_{t-1}, J_{t-1} = 1, Z_t)}_{Q^{\text{sys}}} \underbrace{P(Z_t)}_{\omega_t} \underbrace{P(J_{t-1} = 1 | X_t^D)}_{\mathbb{1}(X_t^D = 1)} \underbrace{P(X_{t-1}, X_{t-1}^D)}_{\Psi_{t-1}}
 \end{aligned}$$

Méthodes exactes

Méthode ad hoc - Simplification du calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$\Psi_t = \sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D C_{d',:} I_{k',:} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' \geq 2) \Psi_{t-1,k',d'} +$$

$$\sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D F_{k',\ell,:}^{\rightarrow} Q_{k',\ell,:}^{\text{sys}} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' = 1) \Psi_{t-1,k',d'}$$

Méthodes exactes

Méthode ad hoc - Simplification du calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$\begin{aligned}
 \Psi_t &= \sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D C_{d',:} I_{k',:} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' \geq 2) \Psi_{t-1,k',d'} + \\
 &\quad \sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D F_{k',\ell,:}^{\rightarrow} Q_{k',\ell,:}^{\text{sys}} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' = 1) \Psi_{t-1,k',d'} \\
 &= \sum_{d'=1}^D \mathbb{1}(d' \geq 2) C_{d',:} \sum_{k'=1}^K I_{k',:} \Psi_{t-1,k',d'} \sum_{\ell=1}^L \omega_{t,\ell} + \\
 &\quad \sum_{d'=1}^D \mathbb{1}(d' = 1) \sum_{k'=1}^K \Psi_{t-1,k',d'} \sum_{\ell=1}^L \omega_{t,\ell} Q_{k',\ell,:}^{\text{sys}} F_{k',\ell,:}^{\rightarrow}
 \end{aligned}$$

Méthodes exactes

Méthode ad hoc - Simplification du calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$\begin{aligned}
\Psi_t &= \sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D C_{d',:} I_{k',:} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' \geq 2) \Psi_{t-1,k',d'} + \\
&\quad \sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D F_{k',\ell,:}^{\rightarrow} Q_{k',\ell,:}^{\text{sys}} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' = 1) \Psi_{t-1,k',d'} \\
&= \sum_{d' \geq 2}^D C_{d',:} \Psi_{t-1, :, d'} + \sum_{k'=1}^K \Psi_{t-1, k', 1} \sum_{\ell=1}^L \omega_{t,\ell} Q_{k',\ell,:}^{\text{sys}} F_{k',\ell,:}^{\rightarrow}
\end{aligned}$$

Méthodes exactes

Méthode ad hoc - Simplification du calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$\begin{aligned}
 \Psi_t &= \sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D C_{d',:} I_{k',:} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' \geq 2) \Psi_{t-1,k',d'} + \\
 &\quad \sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D F_{k',\ell,:}^{\rightarrow} Q_{k',\ell,:}^{\text{sys}} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' = 1) \Psi_{t-1,k',d'} \\
 &= \sum_{d' \geq 2}^D C_{d',:} \Psi_{t-1,:,d'} + \sum_{k'=1}^K \Psi_{t-1,k',1} \sum_{\ell=1}^L \omega_{t,\ell} Q_{k',\ell,:}^{\text{sys}} F_{k',\ell,:}^{\rightarrow}
 \end{aligned}$$

- $\sum_{d' \geq 2}^D C_{d',:} \Psi_{t-1,:,d'} = \Psi_{t-1} C = \overleftarrow{\Psi}_{t-1}$
- ⇒ Décalage des colonnes de Ψ_{t-1} vers la gauche

Méthodes exactes

Méthode ad hoc - Simplification du calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$\begin{aligned}
 \Psi_t &= \sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D C_{d',:} I_{k',:} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' \geq 2) \Psi_{t-1,k',d'} + \\
 &\quad \sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D F_{k',\ell,,:}^{\rightarrow} Q_{k',\ell,:}^{\text{sys}} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' = 1) \Psi_{t-1,k',d'} \\
 &= \overleftarrow{\Psi}_{t-1} + \sum_{k'=1}^K \Psi_{t-1,k',1} (\omega_t Q^{\text{sys}} F^{\rightarrow})_{k',,:}^{\ell \downarrow}
 \end{aligned}$$

Méthodes exactes

Méthode ad hoc - Simplification du calcul de $P(X_t, X_t^D)$

$$\begin{aligned}
 \Psi_t &= \sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D C_{d',:} I_{k',:} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' \geq 2) \Psi_{t-1,k',d'} + \\
 &\quad \sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D F_{k',\ell,:}^{\rightarrow} Q_{k',\ell,:}^{\text{sys}} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' = 1) \Psi_{t-1,k',d'} \\
 &= \overleftarrow{\Psi}_{t-1} + \sum_{k'=1}^K \Psi_{t-1,k',1} (\omega_t Q^{\text{sys}} F^{\rightarrow})_{k',:,1}^{\ell \downarrow} \\
 \Psi_t &= \overleftarrow{\Psi}_{t-1} + \Psi_{t-1,:,1}^{\top} (\omega_t Q^{\text{sys}} F^{\rightarrow})^{\ell \downarrow}
 \end{aligned}$$

Méthodes exactes

Méthode ad hoc - Simplification du calcul de $P(X_t, X_t^D)$

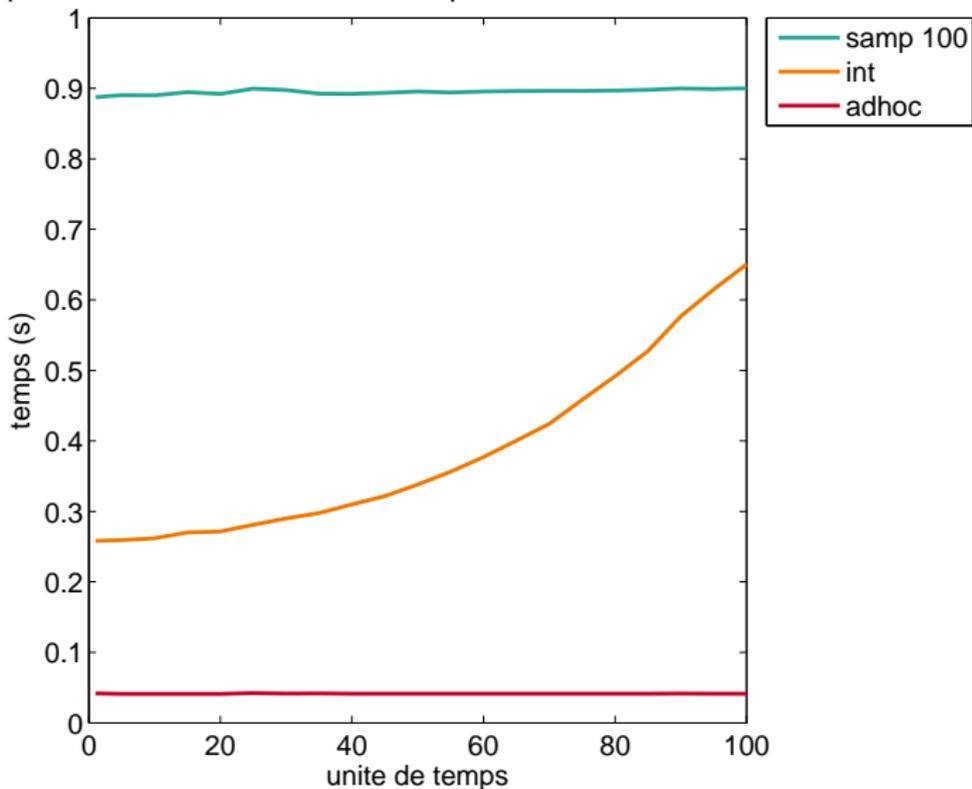
$$\begin{aligned}
 \Psi_t &= \sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D C_{d',:} I_{k',:} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' \geq 2) \Psi_{t-1,k',d'} + \\
 &\quad \sum_{k'=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{d'=1}^D F_{k',\ell,:}^{\rightarrow} Q_{k',\ell,:}^{\text{sys}} \omega_{t,\ell} \mathbb{1}(d' = 1) \Psi_{t-1,k',d'} \\
 &= \overleftarrow{\Psi}_{t-1} + \sum_{k'=1}^K \Psi_{t-1,k',1} (\omega_t Q^{\text{sys}} F^{\rightarrow})_{k',:,1}^{\ell \downarrow} \\
 \Psi_t &= \overleftarrow{\Psi}_{t-1} + \Psi_{t-1,:,1}^{\top} (\omega_t Q^{\text{sys}} F^{\rightarrow})^{\ell \downarrow}
 \end{aligned}$$

Bilan

- Méthode exacte très rapide dépendant peu de D
- Valable uniquement pour les MGD

Comparaison empirique des méthodes d'inférence

Temps d'inférence d'une tranche de temps en fonction de la borne du durée



Application aux calculs de fiabilité

- 4 Application
 - Calculs de fiabilité en temps discret
 - Exemple
 - Influence de la borne D

Calculs de fiabilité en temps discret

Définitions (1/2)

- **Partition des états du système** : $\mathcal{X} = \mathcal{X}_U \cup \mathcal{X}_D$ et $\mathcal{X}_U \cap \mathcal{X}_D = \emptyset$
 - \mathcal{X}_U : États de bon fonctionnement
 - \mathcal{X}_D : États de défaillance

Calculs de fiabilité en temps discret

Définitions (1/2)

- **Partition des états du système** : $\mathcal{X} = \mathcal{X}_U \cup \mathcal{X}_D$ et $\mathcal{X}_U \cap \mathcal{X}_D = \emptyset$
 - \mathcal{X}_U : États de bon fonctionnement
 - \mathcal{X}_D : États de défaillance
- **Fiabilité (Fonction de survie)** : Probabilité que le système soit opérationnel dans l'intervalle $1 \leq \tau \leq t$

$$R(t) = P(X_1 \in \mathcal{X}_U, \dots, X_t \in \mathcal{X}_U)$$

Calculs de fiabilité en temps discret

Définitions (2/2)

- **Disponibilité** : Probabilité que le système soit opérationnel à l'instant t

$$A(t) = P(X_t \in \mathcal{X}_U)$$

Calculs de fiabilité en temps discret

Définitions (2/2)

- **Disponibilité** : Probabilité que le système soit opérationnel à l'instant t

$$A(t) = P(X_t \in \mathcal{X}_U)$$

- **Taux de défaillance** : Probabilité que le système tombe en panne à l'instant t alors qu'il était opérationnel dans l'intervalle $1 \leq \tau \leq t$

$$h(t) = \begin{cases} 1 - \frac{R(t)}{R(t-1)}, & R(t-1) \neq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- Pour d'autres grandeurs de fiabilité, voir Bracquemond and Gaudoin (2003)

Fiabilité et MGD

Objectif

- Estimer la fiabilité d'un système représenté par un MGD
- ⇒ Problème de calculs probabilistes
- ⇒ Utilisation des méthodes d'inférence avec les ensembles d'états adéquats

Deux exemples d'application de la méthode

- Si $\mathcal{S}_1 = \mathcal{X}_U, \dots, \mathcal{S}_t = \mathcal{X}_U \Rightarrow$ Calcul de $R(t)$
- Si $\mathcal{S}_1 = \mathcal{X}, \dots, \mathcal{S}_{t-1} = \mathcal{X}, \mathcal{S}_t = \mathcal{X}_U \Rightarrow$ Calcul de $A(t)$

Exemple : Machine de production

- **Système** : Machine de production
- **Contexte** : Deux modes de fonctionnement
 - ① Lent (L)
 - ② Rapide (R)
- **État du système** :
 - ① Normal (N)
 - ② Dégradé (D)
 - ③ Défaillant (F)
- États de bon fonctionnement : $\mathcal{X}_U = \{N, D\}$
- Borne de durée fixée à $D = 400$ unités de temps

Paramètres (1/2)

Distribution du contexte

- Permet de définir la politique de fonctionnement de la machine
- Exemple :

$$\omega_t = \begin{array}{|c|c|} \hline L & R \\ \hline 0.75 & 0.25 \\ \hline \end{array}$$

⇒ La machine est utilisée 75% du temps en mode lent et 25% en mode rapide

Paramètres (1/2)

Distribution du contexte

- Permet de définir la politique de fonctionnement de la machine
- Exemple :

$$\omega_t = \begin{array}{|c|c|} \hline L & R \\ \hline 0.75 & 0.25 \\ \hline \end{array}$$

⇒ La machine est utilisée 75% du temps en mode lent et 25% en mode rapide

Lois de transition

 $Q_{:,L,:}^{\text{sys}}$

$X_{t-1} \backslash X_t$	N	D	F
N	0	0.9	0.1
D	0	0	1
F	0	0	1

 $Q_{:,R,:}^{\text{sys}}$

$X_{t-1} \backslash X_t$	N	D	F
N	0	0.5	0.5
D	0	0	1
F	0	0	1

⇒ En mode rapide, le système passe plus souvent directement dans l'état défaillant

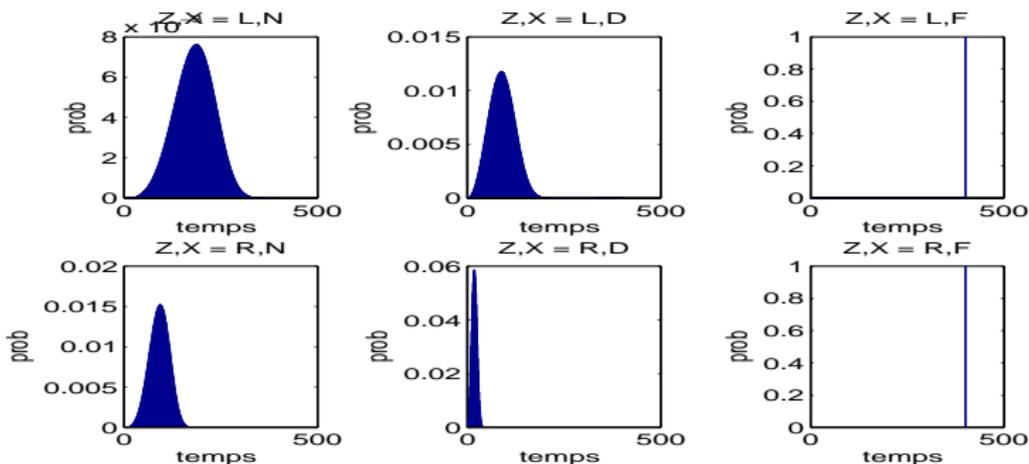
Paramètres (2/2)

Lois des temps de séjour

- Mélange de lois de Weibull

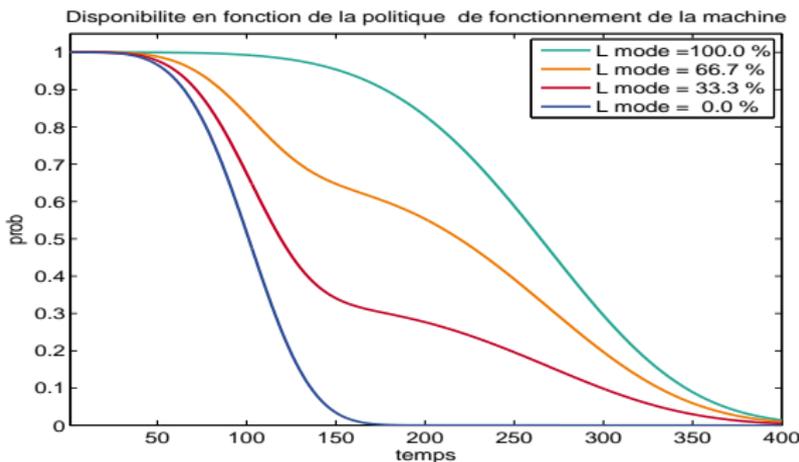
$$F^1 = F^{\rightarrow}$$

$Z_t \setminus X_t$	N	D	F
L	$\mathcal{W}(200, 4)$	$\mathcal{W}(100, 3)$	\emptyset
R	$\mathcal{W}(100, 4)$	$\mathcal{W}(20, 3)$	\emptyset



Calcul de la fiabilité

- Calcul de la fiabilité pour différentes politiques de fonctionnement



- ⇒ Quantification de l'impact du contexte sur le système
- ⇒ Informations utiles pour la prévision des actions de maintenance

Influence de D lors de l'apprentissage

Problème

- **Contexte** : On dispose de données de retours d'expériences issues du système précédent
- **Problème** : Pourquoi ne pas se contenter de choisir $D = 1$ (chaîne de Markov) ou D petit pour simplifier les calculs ?

Influence de D lors de l'apprentissage

Problème

- **Contexte** : On dispose de données de retours d'expériences issues du système précédent
- **Problème** : Pourquoi ne pas se contenter de choisir $D = 1$ (chaîne de Markov) ou D petit pour simplifier les calculs ?

Exemple sur une donnée

- Donnée originale

Z_t	L
X_t	N
X_t^D	200
X_{t+1}	F

Influence de D lors de l'apprentissage

Problème

- **Contexte** : On dispose de données de retours d'expériences issues du système précédent
- **Problème** : Pourquoi ne pas se contenter de choisir $D = 1$ (chaîne de Markov) ou D petit pour simplifier les calculs ?

Exemple sur une donnée

- Si on pose $D = 75$, la donnée est censurée et devient

Z_t	L	L	L
X_t	N	N	N
X_t^D	75	75	50
X_{t+1}	N	N	F

⇒ Perte d'informations sur les transitions et les lois de temps de séjour

Influence de D lors de l'apprentissage

Problème

- **Contexte** : On dispose de données de retours d'expériences issues du système précédent
- **Problème** : Pourquoi ne pas se contenter de choisir $D = 1$ (chaîne de Markov) ou D petit pour simplifier les calculs ?

Exemple sur une donnée

- Pire si $D = 1$

Z_t	L	L	...	L
X_t	N	N	...	N
X_t^D	1	1	...	1
X_{t+1}	N	N	...	F

⇒ Grosse perte d'informations...

Influence de D lors de l'apprentissage

Problème

- **Contexte** : On dispose de données de retours d'expériences issues du système précédent
- **Problème** : Pourquoi ne pas se contenter de choisir $D = 1$ (chaîne de Markov) ou D petit pour simplifier les calculs ?

Exemple sur une donnée

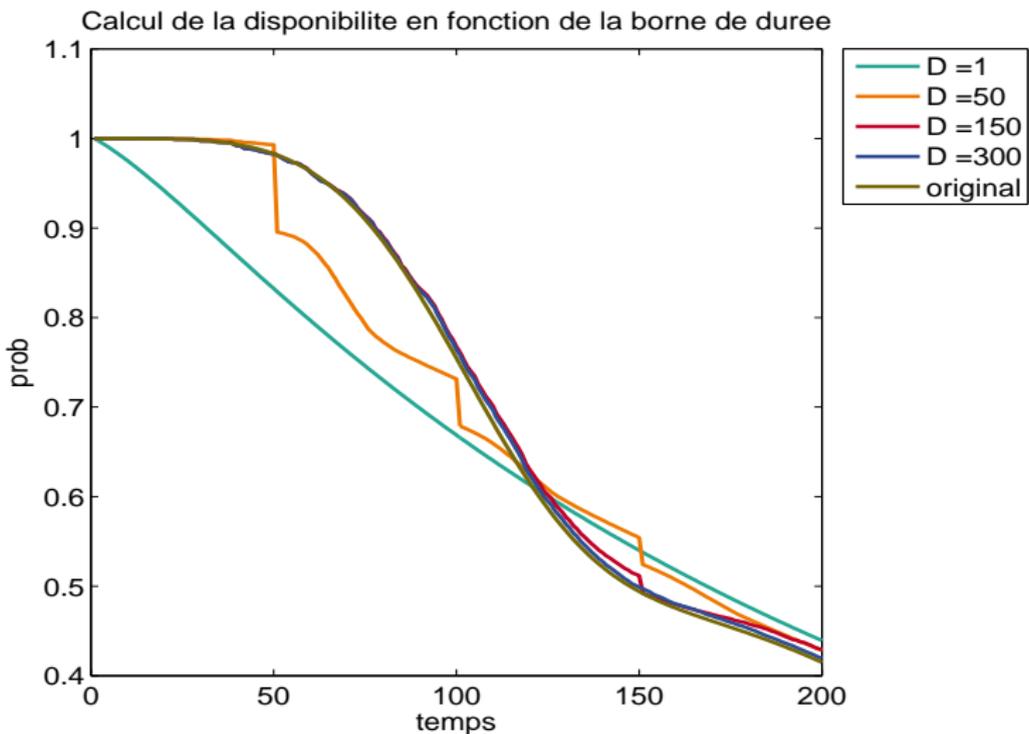
- En revanche si $D \geq 200$, la donnée reste intacte

Z_t	L
X_t	N
X_t^D	200
X_{t+1}	F

⇒ Information complète

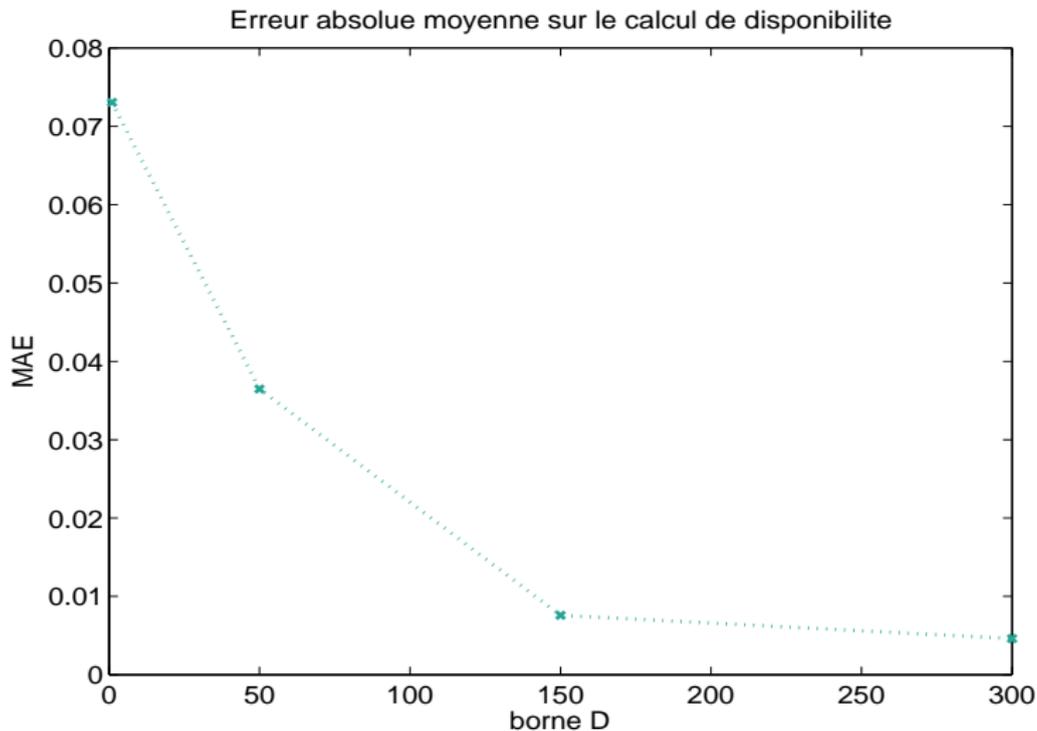
Influence de D lors de l'apprentissage

Comparaisons empiriques sur le calcul de fiabilité



Influence de D lors de l'apprentissage

Calcul d'erreurs



Conclusions

Conclusions

- Proposition d'un modèle de durée original
- La modélisation graphique est intuitive
- Représentation précise des systèmes dynamiques discrets
- Le modèle développé est facilement généralisable
- L'approche est générique et peut s'appliquer dans d'autres domaines

Perspectives

- Calcul théorique de la complexité des algorithmes d'inférence développés
- Tenter d'établir certaines propriétés asymptotiques du modèle
- Apprentissage avec des données incomplètes

Bibliographie

Barbu, V., M. Boussemart, and N. Limnios (2004).

Discrete time semi-markov processes for reliability and survival analysis.
Communication in Statistics - Theory and Methods 33(11), 2833–2868.

Bracquemond, C. and O. Gaudoin (2003).

A survey on discrete lifetime distributions.
International Journal on Reliability, Quality, and Safety Engineering 10(1), 69–98.

Dechter, R. (1999).

Bucket elimination : A unifying framework for reasoning.
Artificial Intelligence 113(1-2), 41–85.

Gilks, W. R. (1995, December).

Markov Chain Monte Carlo in Practice.
Chapman & Hall/CRC.

Kay, R. (1977).

Proportional hazard regression models and the analysis of censored survival data.
Applied Statistics 26(3), 227–237.

Murphy, K. P. (2002).

Dynamic Bayesian Networks : Representation, Inference and Learning.
Ph. D. thesis, University of California, Berkeley.

Neapolitan, R. E. (2003, April).

Learning Bayesian Networks.
Prentice Hall.

Pearl, J. (1988, September).

Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems : Networks of Plausible Inference.
Morgan Kaufmann.

Questions ?

Merci pour votre attention

Questions ?