Sur le modèle de Brown-Proschan et ses généralisations

Laurent DOYEN
laurent.doyen@imag.fr

Institut National Polytechnique de Grenoble
Laboratoire LMC
BP 53 - 38 041 Grenoble Cedex 9 France

Les systèmes réparables complexes sont soumis à 2 types d'actions de maintenance :

- **Maintenances Correctives (MC, réparations) :**
  actions exécutées après détection d'une panne et destinées à remettre un bien dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise (AFNOR[01]).

- **Maintenances Préventives (MP) :**
  actions exécutées à des intervalles de temps prédéterminés ou selon des critères prescrits et destinées à réduire la probabilité de défaillance ou la dégradation du fonctionnement d'un bien (AFNOR[01]).

Une gestion efficace des politiques de maintenance nécessite une modélisation réaliste et une évaluation précise de leur effet.

Plan

I. Un modèle de MC : Brown-Proschan

– modélisation et étude du comportement du processus des défaillances,
– caractérisation de ce processus à l'aide de l'intensité de défaillance,
– estimation de l'efficacité de réparation.

II. Généralisation au cas de MP

II.a MP planifiées

– modélisation par un processus ponctuel (auto-excité)
– les plans de MP classiques.

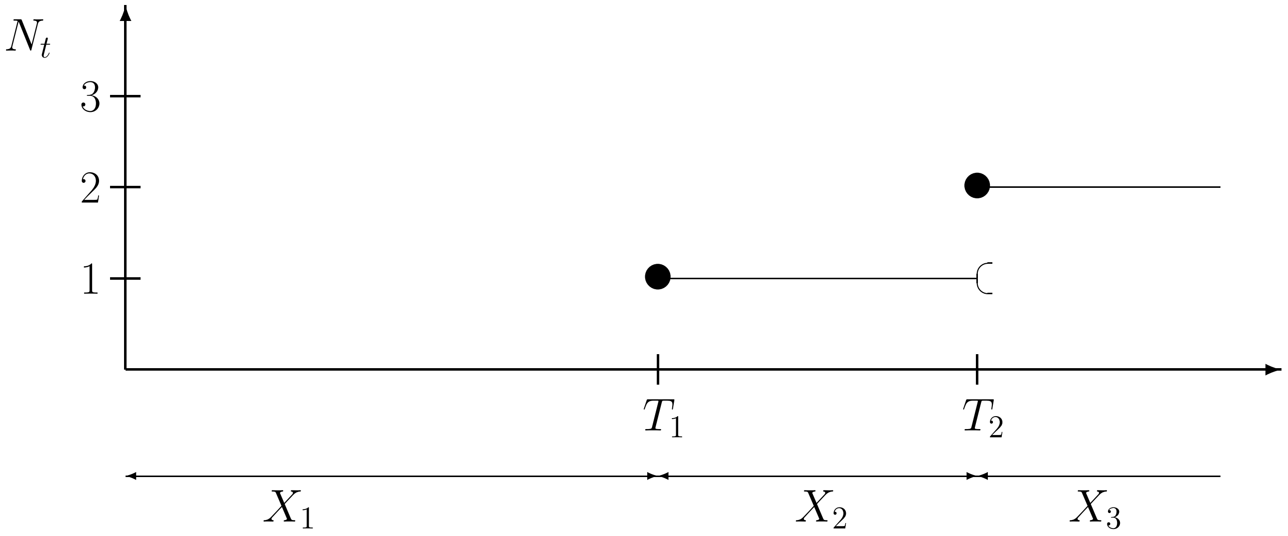
II.b MP conditionnelles

– modélisation par un processus ponctuel bivarié,
– lien avec l'approche risques concurrents,
– lois de dépendance entre les risques,
– effet de maintenance non symétrique.

III. Vers un modèle d'inspections planifiées

I. Un modèle de MC : Brown-Proschan

Hypothèse : Les durées de maintenance ne sont pas prises en compte.



– Instants de défaillance (= MC) : $\{T_i\}_{i\geq 1}$
– Durées inter-défaillances : $X_i = T_i - T_{i-1}$
– Nombre cumulé de défaillances survenues : $\{N_t\}_{t\geq 0}$ processus aléatoire ponctuel

a/ Modélisation stochastique du processus des défaillances

Intensité de défaillance :

$$\lambda_t^N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t-} = 1 | \mathcal{H}_{t-})$$

où $\mathcal{H}_{t-}$ est l'histoire du processus des défaillances.

Processus ponctuel auto-excité : $\mathcal{H}_{t-} = \sigma(\{N_s\}_{0 \leq s < t})$

$\lambda_t^N = \lambda_t$ caractérise alors complètement le processus des défaillances :

$$P(X_{n+1} > x \mid \underbrace{\boldsymbol{T}_n}_{T_1,\ldots,T_n}) = exp\left(- \int_{T_n}^{T_n + x} \lambda_u du \right)$$

$$L_t(\theta) = \Big[\prod_{i=1}^{N_t} \lambda_{T_i} \Big] e^{-\Lambda_t} \qquad \text{où } \Lambda_t = \int_0^t \lambda_u \, du$$

Le système neuf a une durée de vie Z,

de taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(t < Z \leq t + \Delta t | Z > t)$$

$\lambda(t)$ est appelée **intensité initiale**
et caractérise la qualité intrinsèque du système.

$\lambda(t)$ est supposée déterministe et non identiquement nulle.
On note : $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$.

Applications : $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$, avec $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

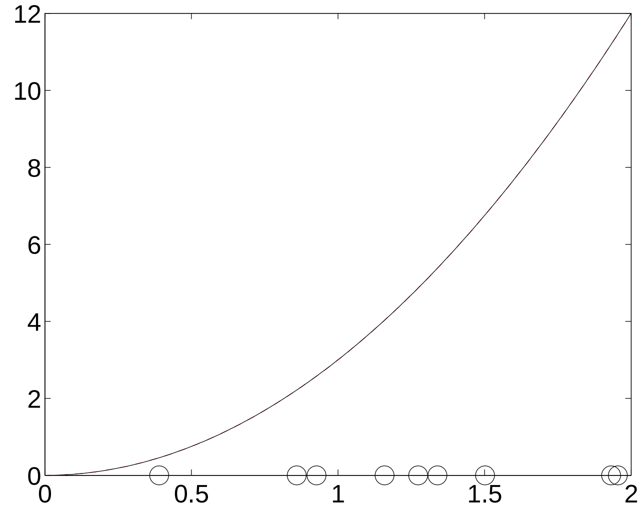
b/ Modèles basiques

Hypothèse : **"As Bad As Old"**

Réparation minimale

⇒ Processus de Poisson Non Homogène (NHPP) :

$$\boxed{\lambda_t = \lambda(t)}$$

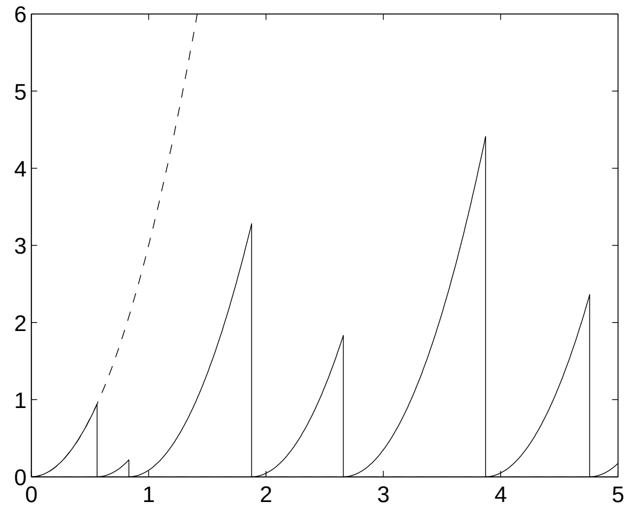


Hypothèse : **"As Good As New"**

Réparation optimale

⇒ Processus de Renouvellement (RP) :

$$\boxed{\lambda_t = \lambda(t - T_{N_{t-}})}$$



En pratique, on est entre ces deux extrêmes

c/ Modèle de Brown-Proschan

Brown-Proschan [83]

Les effets de maintenance sont :

- mutuellement indépendants,
- indépendants des instants de MC précédents,
- **AGAN** avec une probabilité $\boldsymbol{p}$,
- **ABAO** avec une probabilité $\mathbf{1}-\boldsymbol{p}$.

B_i appelé **effet de** la $i^{\text{ème}}$ **maintenance** :

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{MC AGAN} \\ 0 & \text{MC ABAO} \end{cases}$$

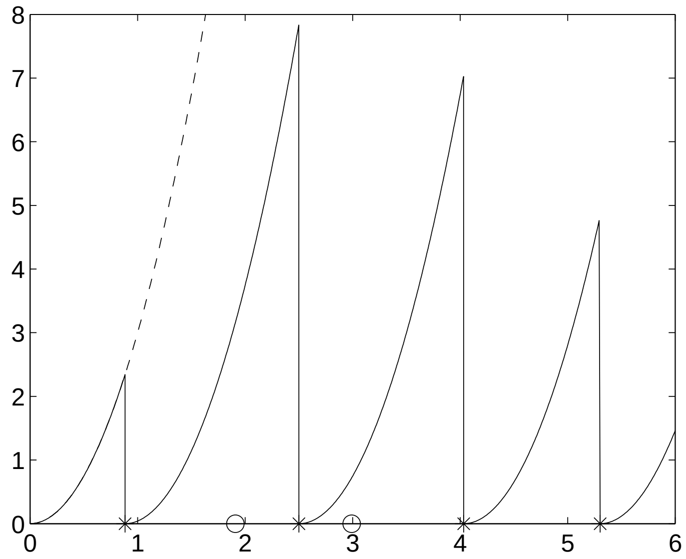
$$P(B_i = 1 \mid \boldsymbol{T}_i, \boldsymbol{B}_{i-1}) = P(B_i = 1) = p$$

$A_i = T_i - T_{max\{k<i|B_k=1\}}$ appelé **âge effectif** $(A_0 = 0)$,

représente le temps écoulé depuis la dernière maintenance parfaite.

$$A_i = (1 - B_i)[X_i + A_{i-1}] \quad \Rightarrow \quad A_i = \sum_{j=1}^{i} \Big[\prod_{k=j}^{i} (1 - B_k) \Big] X_j$$

$$\boxed{\lambda_t^N(N, B) = \lambda\Big(t - T_{N_{t^-}} + \sum_{j=1}^{N_{t^-}} \Big[\prod_{k=j}^{N_{t^-}} (1 - B_k) \Big] X_j \Big)}$$



Whitaker-Samaniego [89] :
Si $\lambda(t)$ est constant ($\Leftrightarrow\ X_1 \sim \mathcal{E}$), alors p n'est pas identifiable.

Mais,

si X_1 ne suit pas une loi exponentielle,
alors p et λ sont identifiables.

En pratique, il n'y a pas de MC ABAO, ni AGAN,
p représente simplement un degré d'efficacité de maintenance :

- $\boldsymbol{p = 0}$: MC ABAO
- $\boldsymbol{p = 1}$: MC AGAN
- $\boldsymbol{0 < p < 1}$: MC imparfaite

Les $\{B_i\}_{i\geq 0}$ **sont des variables cachées**,
on étudie le comportement du processus des défaillances,
et on cherche à estimer p.

d/ Comportement du processus des défaillances

$$\boxed{F_{A_n}(x) = 1 - (1-p)\, e^{-\Lambda(x)} \Big[\sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k \frac{\Lambda^k(x)}{k!} \Big]}$$

- Si $p > 0$, $A_n \xrightarrow{\mathcal{L}} A$

avec $F_A(x) = 1 - (1-p)\, e^{-p\,\Lambda(x)}$.

- S'il existe $\epsilon > 0$ tel que $x^{1+\epsilon} \exp(-\Lambda(x)) = o(1)$, alors

$$E[A_n] = (1-p) \int_0^{+\infty} e^{-\Lambda(x)} \Big[\sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k \frac{\Lambda^k(x)}{k!} \Big] \, dx$$

et si en plus $p > 0$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} E[A_n] = (1-p) \int_0^{+\infty} e^{-p\,\Lambda(x)} \, dx$$

- $S_{X_n}(x) \overset{Def}{=} P(X_n > x) = p\, e^{-\Lambda(x)} + (1-p)$

$$\int_0^{+\infty} \left[(1-p)^{n-2}\frac{\Lambda^{n-2}(v)}{(n-2)!} + p\sum_{k=0}^{n-3}(1-p)^k\frac{\Lambda^k(v)}{k!}\right]\lambda(v)\, e^{-\Lambda(x+v)}\, dv$$

- Si $p > 0$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

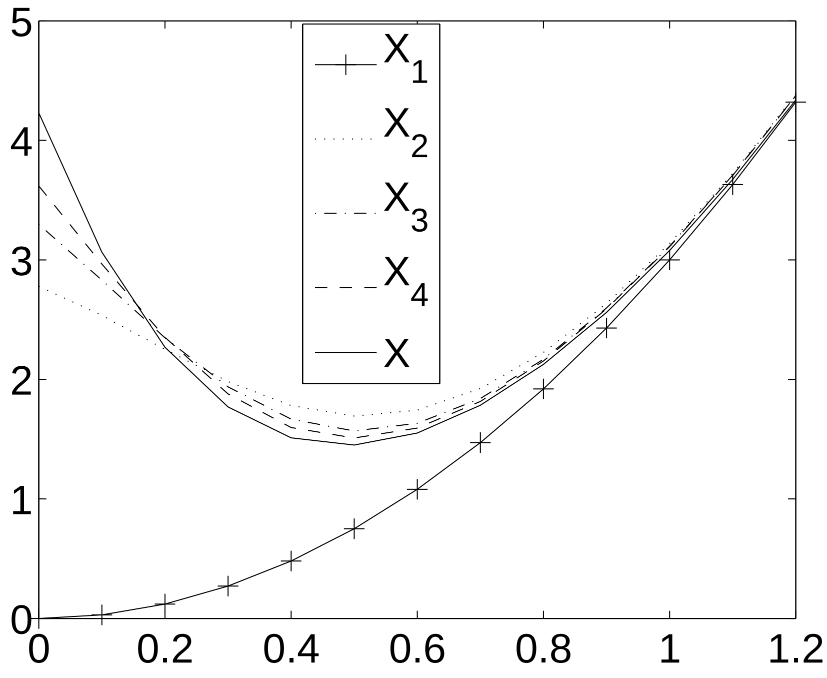
avec $S_X(x) = p\int_0^{+\infty} \lambda(x+v)\, e^{-\Lambda(x+v)+(1-p)\,\Lambda(v)}\, dv$.

- S'il existe $\epsilon > 0$ tel que $x^{1+\epsilon}\exp(-\Lambda(x)) = o(1)$, alors

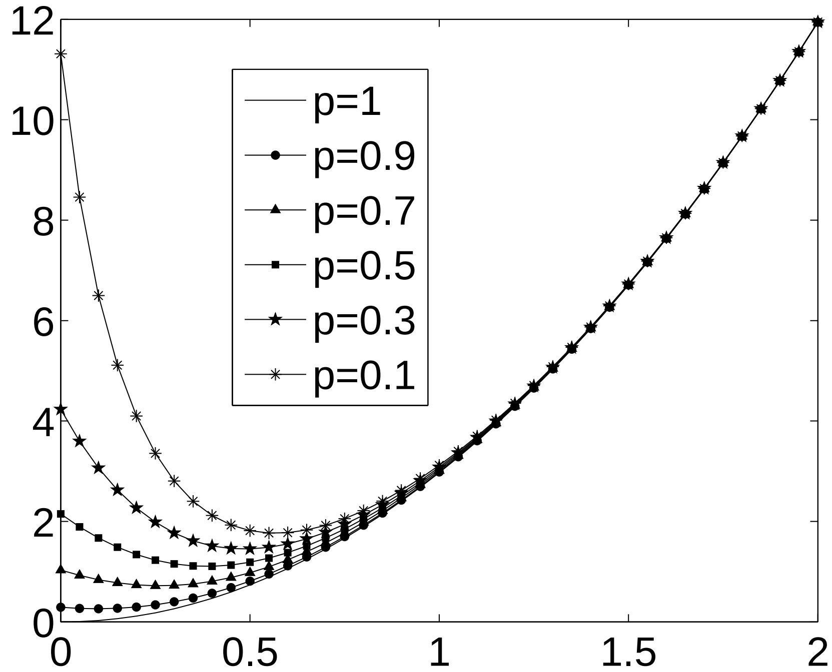
$$E[X_n] = \int_0^{+\infty} e^{-\Lambda(x)}\left[(1-p)^{n-1}\frac{\Lambda^{n-1}(x)}{(n-1)!} + p\sum_{k=0}^{n-2}(1-p)^k\frac{\Lambda^k(x)}{(k)!}\right] dx$$

et si en plus $p > 0$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = p\int_0^{+\infty} e^{-p\,\Lambda(x)}\, dx$$



Taux de hasard pour $p = 0.3$



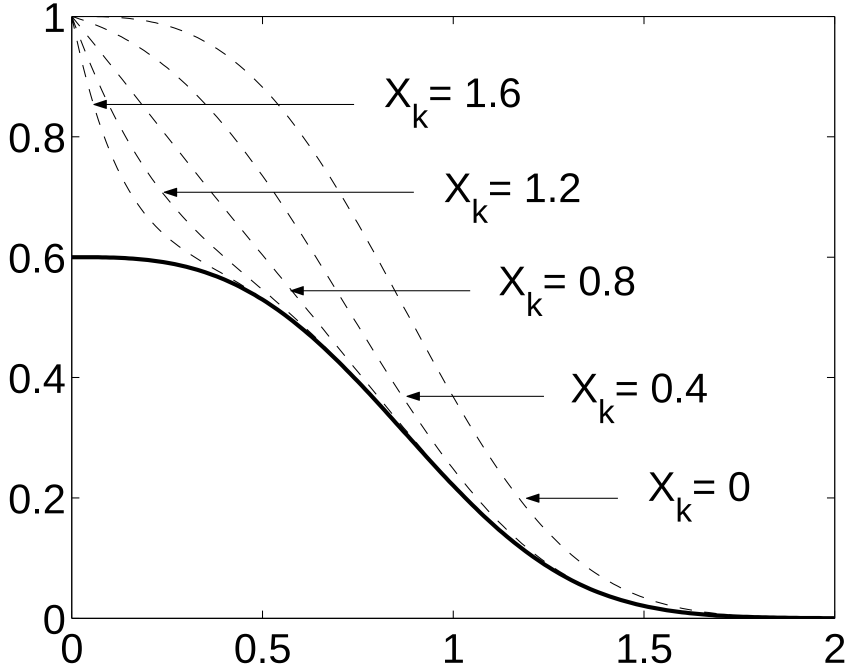
Taux de hasard de X

Il y a une **surmortalité** du système
juste après les actions de maintenance.

Une propriété de renouvellement asymptotique :

Si $\lambda(t)$ est strictement croissante alors :

$$0 \leq P(X_{k+1} > x \mid X_k > y, \boldsymbol{X}_{k-1}) - p\, e^{-\Lambda(x)} \leq (1-p)e^{-\Lambda(x+y)+\Lambda(y)}$$



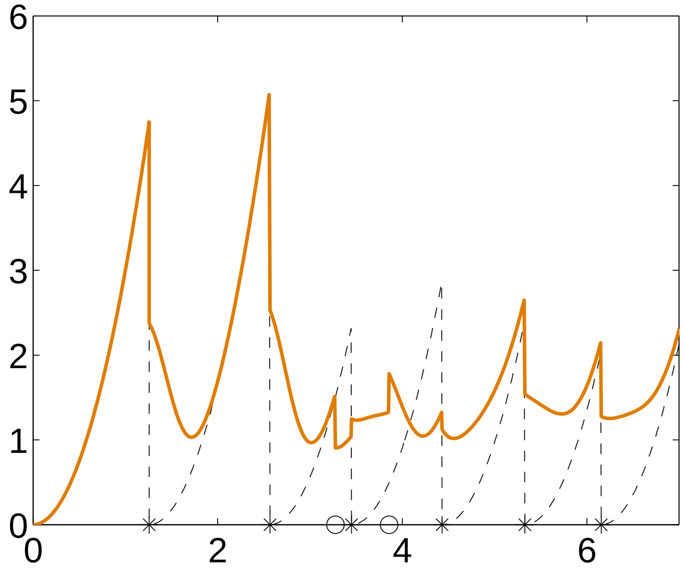
Bornes pour la fonction de survie conditionnelle de X_{k+1}.

e/ Caractérisation du processus des défaillances

Théorème d'innovation : $\lambda_t = E[\lambda_t^N(N,B)|\{N_s\}_{0\le s\le t}]$

Intensité de défaillance propre du modèle BP :

$$\lambda_t = \frac{-d}{dt}\left[ln\left(\sum_{j=0}^{N_{t-}} p^{\mathbb{1}\{j>0\}}(1-p)^{N_{t-}-j}\left[\prod_{i=j+1}^{N_{t-}}\frac{\lambda(T_i-T_j)}{\lambda_{T_i}}\right]e^{-\Lambda(t-T_j)-\Lambda_{T_j}}\right)\right]$$



— Intensité propre (λ_t)
- - Intensité relative ($\lambda_t(N,B)$)

e/ Estimation de l'efficacité de réparation

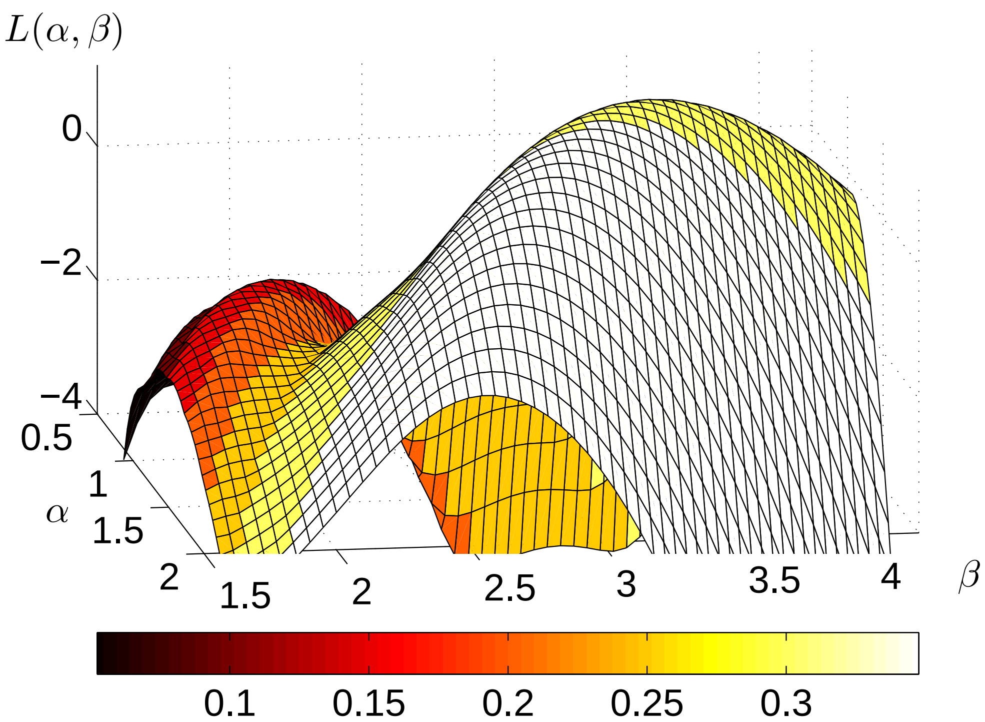
- Lim [98] : algorithme EM (Expectation-Maximization)
- Langseth-Lindqvist [03] : fonction de vraisemblance fausse

Vraisemblance propre :

$$L_t(\theta) = (1-p)^{N_{t^-}} \Big[\prod_{i=1}^{N_{t^-}} \lambda(T_i) \Big] \lambda(t)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}} e^{-\Lambda(t)} + p \Big[\sum_{j=1}^{N_{t^-}} (1-p)^{N_{t^-}-j} \Big[\prod_{i=j+1}^{N_{t^-}} \lambda(T_i - T_j) \Big] \lambda(t-T_j)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}} e^{-\Lambda(t-T_j)} L_{T_j}(\theta) \Big]$$

La complexité du calcul de la vraisemblance propre est en $O\big(\frac{n(n+1)}{2}\big)$, où n est le nombre de défaillances observées.

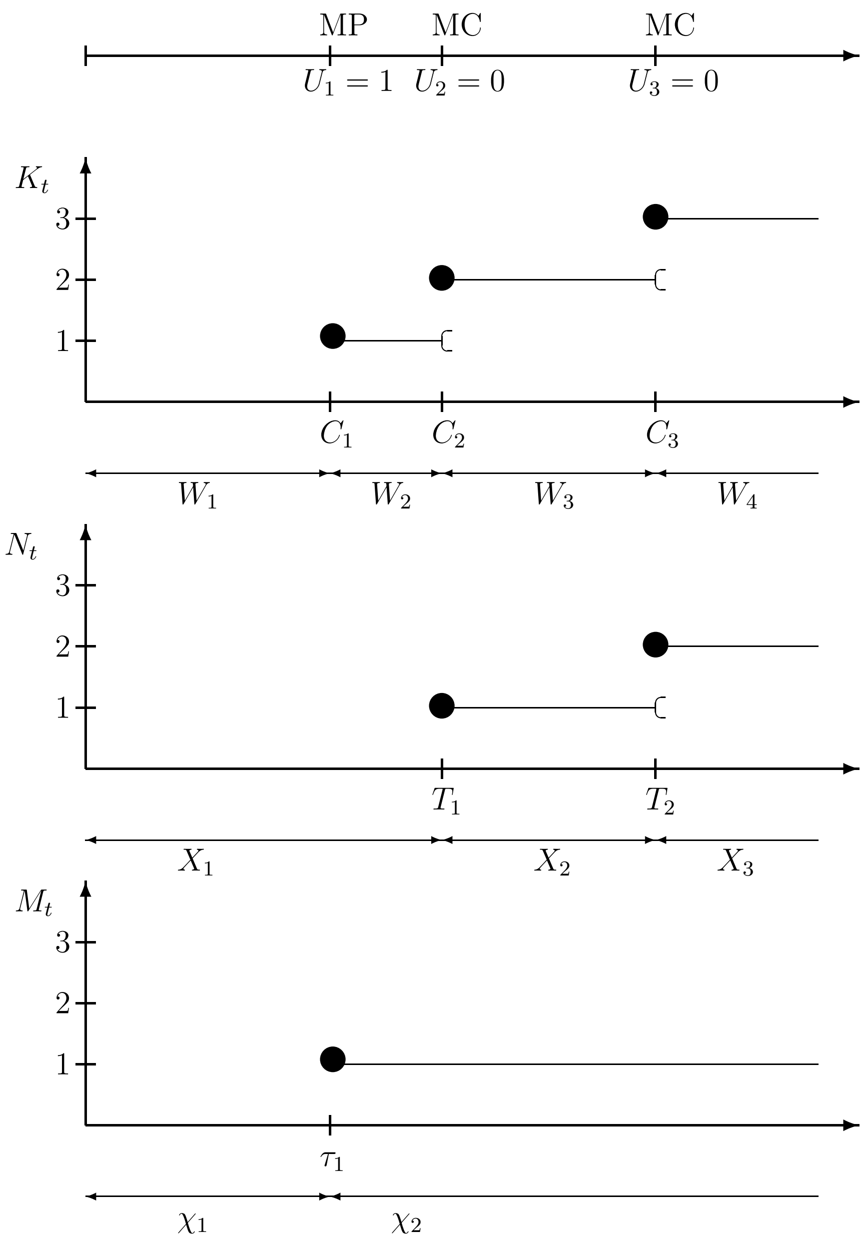
Log-vraisemblance pour un échantillon de 50 défaillances tiré avec $\lambda(t) = \alpha\, \beta t^{\beta-1}$ et $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $p = 0.5$.



Attention : La vraisemblance propre possède des maxima relatifs.

Avec 50 défaillances les estimateurs de maximum de vraisemblance sont très proche de ceux donnés par EM.

II. Généralisation au cas de MP



Processus coloré

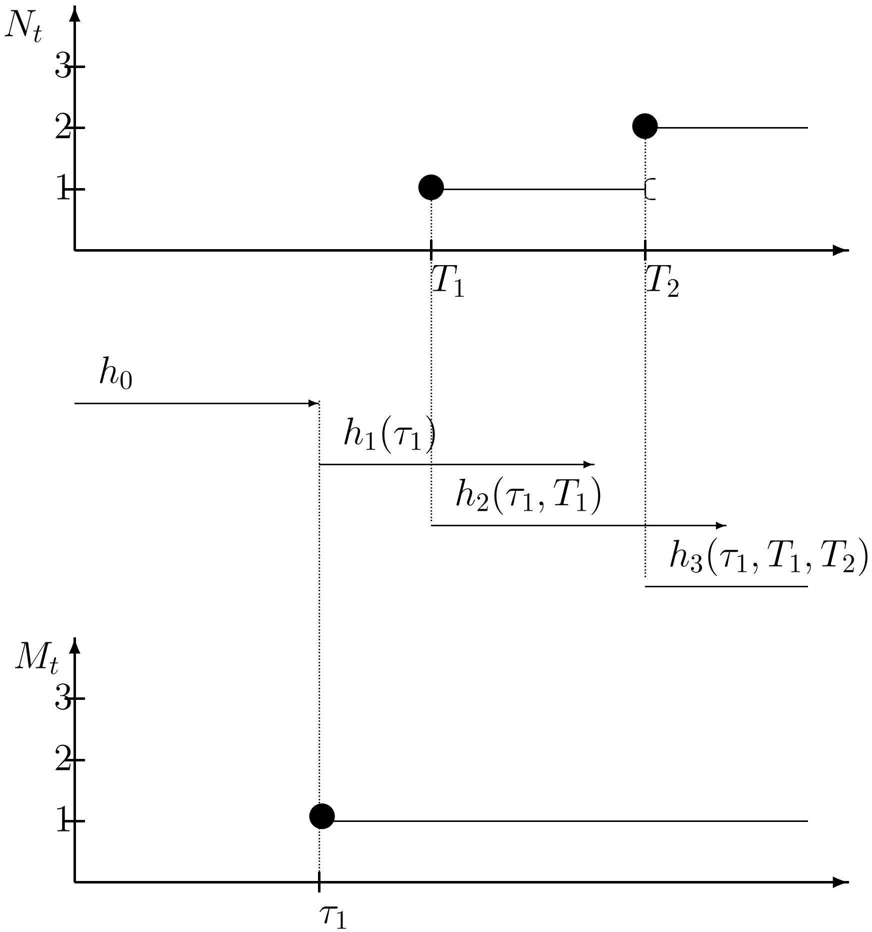
– Nb de maintenances : $\{K_t\}_{t\geq 0}$
– Instants de maintenance : $\{C_i\}_{i\geq 1}$
– Type de maintenance : $\{U_i\}_{i\geq 1}$
– Durées inter-maintenances : $\{W_i\}_{i\geq 1}$

Processus bivarié

– Nb de MC : $\{N_t\}_{t\geq 0}$
– Instants de MC : $\{T_i\}_{i\geq 1}$
– Durées inter-MC : $\{X_i\}_{i\geq 1}$

– Nb de MP : $\{M_t\}_{t\geq 0}$
– Instants de MP : $\{\tau_i\}_{i\geq 1}$
– Durées inter- MP : $\{\chi_i\}_{i\geq 1}$

a/ MP planifiées
a.1/ Définition et approche processus ponctuels



La date prévue de la prochaine MP est une fonction déterministe du passé des observations :

$$U_{K_{t-}+1} = 1 \Rightarrow$$
$$\tau_{M_{t-}+1} = C_{K_{t-}} + h_{K_{t-}}(\boldsymbol{W}_{K_{t-}}, \boldsymbol{U}_{K_{t-}})$$

avec $h_k(.)$ fonction déterministe.

$$\lambda_t^N(K,U) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t^-} = 1 \,|\, K_{t^-}, \boldsymbol{W}_{K_{t^-}}, \boldsymbol{U}_{K_{t^-}})$$

$\boxed{\boldsymbol{N} \textbf{ est un processus ponctuel auto-excité.}}$

Loi conditionnelle du temps d'attente de la défaillance :

$$P(T_{N_{C_k}+1} > t | \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < C_k \\ e^{-\int_{C_k}^{t} \lambda_s^N(K,U)\, ds} & \text{sinon} \end{cases}$$

Fonction de vraisemblance :

$$L_t(\theta) = \left[\prod_{i=1}^{K_t} \lambda_{C_i}^N(i-1, \boldsymbol{W}_{i-1}, \boldsymbol{U}_{i-1})^{1-U_i} \right] e^{-\sum_{j=1}^{K_{t^-}+1} \int_{C_{j-1}}^{C_j} \lambda_s^N(j-1, \boldsymbol{W}_{j-1}, \boldsymbol{U}_{j-1})\, ds}$$

a.2/ Modèle BP généralisé

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{si la maintenance est AGAN} \\ 0 & \text{si la maintenance est ABAO} \end{cases}$$

$$P(B_i = 1 \,|\, \boldsymbol{W}_i, \boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{B}_{i-1}) = \begin{cases} p_c & \text{si } U_{k+1} = 0 \text{ (MC)} \\ p_p & \text{si } U_{k+1} = 1 \text{ (MP)} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{p_p = p_c = 0}$:
MP ABAO, MC ABAO
$$\lambda_t^N = \lambda(t)$$

- $\boldsymbol{p_p = p_c = 1}$:
MP AGAN, MC AGAN
$$\lambda_t^N(K) = \lambda(t - C_{K_{t^-}})$$

- $\boldsymbol{p_p = 0}$, $\boldsymbol{p_c = 1}$:
MP ABAO, MC AGAN
$$\lambda_t^N(N) = \lambda(t - T_{N_{t^-}})$$

- $\boldsymbol{p_p = 1}$, $\boldsymbol{p_c = 0}$:
MP AGAN, MC ABAO
$$\lambda_t^N(M) = \lambda(t - \tau_{M_{t^-}})$$

Intensité de défaillance relative du modèle BP :

$$\lambda_t^N(K, U, B) = \lambda\left(t - C_{K_{t^-}} + \sum_{j=1}^{K_{t^-}} \left[\prod_{i=j}^{K_{t^-}} (1 - B_i)\right] W_j\right)$$

Théorème d'innovation : $\lambda_t^N(K,U) = E[\lambda_t^N(K,U,B) | \{K_s, U_{K_s}\}_{0\leq s\leq t}]$

$$\lambda_t^N(K,U) = -\frac{d}{dt}\left[ln\left(\sum_{j=0}^{K_{t-}} p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}}\left[\prod_{i=j+1}^{K_{t-}}(1-p_{U_i})\left[\frac{\lambda(C_i - C_j)}{\lambda_{C_i}^N(K,U)}\right]^{1-U_i}\right] e^{-\Lambda(t-C_j)-\Lambda_{C_j}^N(K,U)}\right)\right]$$

$$\begin{aligned} L_t(\theta) &= \left[\prod_{i=1}^{K_{t-}}(1-p_{U_i})\lambda(C_i)^{1-U_i}\right]\lambda(t)^{(1-U_{K_t})\mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}}} e^{-\Lambda(t)} \\ &+ \left[\sum_{j=1}^{K_{t-}} p_{U_j}\left[\prod_{i=j+1}^{K_{t-}}(1-p_{U_i})\lambda(C_i - C_j)^{1-U_i}\right]\right. \\ &\qquad \left. \lambda(t-C_j)^{(1-U_{K_t})\mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}}} e^{-\Lambda(t-C_j)} L_{C_j}(\theta)\right] \end{aligned}$$

a.3/ Politiques classiques de MP

- **MP à date fixée :** Les dates de MP sont déterministes

$$h_k(\boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k) = \tau_{m_{C_k}+1} - C_k$$

Nakagawa [88], Chan-Shaw [93], Wang-Pham [96], **Jack [97][98]**

- **MP à âge fixé :** $t - C_{K_{t^-}} + A_{K_{t^-}}(K,U) \geq a_{K_{t^-}} \Rightarrow \text{MP}$

$$h_k(\boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k) = a_k - A_k(K,U)$$

Brown-Mahoney-Sivazlian [83], Dagpunar-Jack [94], Lin-Zuo-Yam [00]

- **MP à intensité fixée :** $\lambda_t^N(K,U) \geq b_{K_{t^-}} \Rightarrow \text{MP}$

$$h_k(\boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k) = \lambda^{-1}(b_k) - A_k(K,U)$$

Lie-Chun [86], Jayabalan-Chaudhuri [92], Lin-Zuo-Yam[00]

b/ MP conditionnelles

b.1/ Définition et approche processus ponctuels bivariés

La MP a lieu **en fonction d'une surveillance du système** :
– état de dégradation avancé,
– perte de performance,
– sortie des conditions standards de fonctionnement,...

$$\boxed{\begin{aligned}
\lambda_t^N(K,U) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t^-} = 1 | K_{t^-}, \boldsymbol{W}_{K_{t^-}}, \boldsymbol{U}_{K_{t^-}}) \\
\lambda_t^M(K,U) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(M_{t+\Delta t} - M_{t^-} = 1 | K_{t^-}, \boldsymbol{W}_{K_{t^-}}, \boldsymbol{U}_{K_{t^-}}) \\
\lambda_t^K(K,U) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(K_{t+\Delta t} - K_{t^-} = 1 | K_{t^-}, \boldsymbol{W}_{K_{t^-}}, \boldsymbol{U}_{K_{t^-}})
\end{aligned}}$$

$$\lambda_t^K(K,U) = \lambda_t^N(K,U) + \lambda_t^M(K,U)$$

Formules de Jacod : Andersen-Borgan-Gill-Keiding [93]

$$P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 0 | \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k) = \int_w^{+\infty} \lambda^N_{C_k+u}(k, \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k)\, e^{-\int_0^w \lambda^K_{C_k+s}(k, \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k)\, ds} du$$

$$P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 1 | \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k) = \int_w^{+\infty} \lambda^M_{C_k+u}(k, \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k)\, e^{-\int_0^w \lambda^K_{C_k+s}(k, \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k)\, ds} du$$

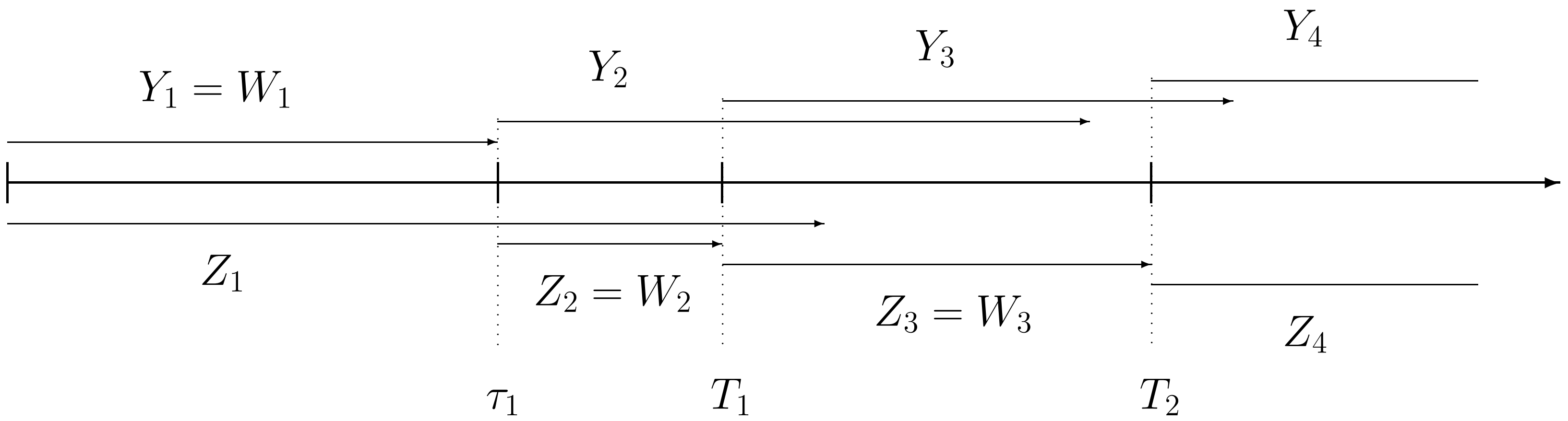
Fonction de vraisemblance :

$$L_t(\theta) = \Big[\prod_{i=1}^{K_t} \lambda^N_{C_i}(i-1, \boldsymbol{W}_{i-1}, \boldsymbol{U}_{i-1})^{1-U_i}\, \lambda^M_{C_i}(i-1, \boldsymbol{W}_{i-1}, \boldsymbol{U}_{i-1})^{U_i}\Big] \exp\Big(-\sum_{j=1}^{K_{t-}+1} \int_{C_{j-1}}^{C_j} \lambda^K_s(j-1, \boldsymbol{W}_{j-1}, \boldsymbol{U}_{j-1})\, ds\Big)$$

a.2/ Approche risques concurrents

Cooke-Bedford [02]

– Y_i durée d'attente de la prochaine MP si une MC ne survient pas avant
– Z_i durée d'attente de la prochaine MC si une MP ne survient pas avant



Toutes les maintenances sont supposées AGAN

$$\forall k \geq 1 \qquad P(Y_k > y, Z_k > z) = P(Y_1 > y, Z_1 > z) = S(y,z)$$

- **Modèle à risques indépendants :** $Y_1 \perp Z_1$
- **Modèle à signe aléatoire :** Cooke [93], $(Y_1 - Z_1) \perp Z_1 \Leftrightarrow U_1 \perp Z_1$

a.3/ Généralisation de l'approche risques concurrents

$$S_{k+1}(y, z; \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k) = P(Y_{k+1} > y, Z_{k+1} > z | \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k)$$

Lien avec l'approche processus bivariés :

$$\lambda_t^N(K, U) = \frac{\left[-\dfrac{\partial}{\partial z} S_{K_{t-}+1}(y, z; \boldsymbol{W}_{K_{t-}}, \boldsymbol{U}_{K_{t-}}) \right]_{(t-C_{K_{t-}}, t-C_{K_{t-}})}}{S_{K_{t-}+1}(t - C_{K_{t-}}, t - C_{K_{t-}}; \boldsymbol{W}_{U_{K_{t-}}}, \boldsymbol{U}_{K_{t-}})}$$

$$\lambda_t^M(K, U) = \frac{\left[-\dfrac{\partial}{\partial y} S_{K_{t-}+1}(y, z; \boldsymbol{W}_{K_{t-}}, \boldsymbol{U}_{K_{t-}}) \right]_{(t-C_{K_{t-}}, t-C_{K_{t-}})}}{S_{K_{t-}+1}(t - C_{K_{t-}}, t - C_{K_{t-}}; \boldsymbol{W}_{K_{t-}}, \boldsymbol{U}_{K_{t-}})}$$

Problème d'identifiabilité au niveau de la dépendance entre les risques de MC et de MP

Les risques de MP et MC sont dits conditionnellement indépendants si :

$$S_{k+1}(y, z; \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k) = P(Y_{k+1} > y | \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k)$$
$$P(Z_{k+1} > z | \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k)$$

Pour tout $\{(Y_i, Z_i)\}_{i \geq 1}$ il existe une unique série de variables $\{(\tilde{Y}_i, \tilde{Z}_i)\}_{i \geq 1}$ avec les mêmes intensités de MP et MC, et des risques conditionnellement indépendants.

a.4/ Modèle BP généralisé

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{si la maintenance est AGAN} \\ 0 & \text{si la maintenance est ABAO} \end{cases}$$

$$P(B_i = 1 \,|\, \boldsymbol{W}_i, \boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{B}_{i-1}) = \begin{cases} p_c & \text{si } U_{k+1} = 0 \text{ (MC)} \\ p_p & \text{si } U_{k+1} = 1 \text{ (MP)} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{p_p = p_c = 1}$: MP et MC AGAN

$$\lambda_t^N(K) = \lambda_c(t - C_{K_{t^-}}) \quad \text{et} \quad \lambda_t^M(K) = \lambda_p(t - C_{K_{t^-}})$$

- $\boldsymbol{p_p = p_c = 0}$: MP et MC ABAO

$$\lambda_t^N = \lambda_c(t) \quad \text{et} \quad \lambda_t^M = \lambda_p(t)$$

avec

$$\lambda_c(x) = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial z} S_1(y, z)\right]_{(t,t)}}{S_1(x, x)} \qquad \lambda_p(x) = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial y} S_1(y, z)\right]_{(t,t)}}{S_1(x, x)}$$

Intensités relatives :

$$\lambda_t^N(K,U,B) = \lambda_c\Big(t - C_{K_{t-}} + \sum_{j=1}^{K_{t-}}\sum_{k=j}^{K_{t-}}(1-B_k)W_k\Big)$$

$$\lambda_t^M(K,U,B) = \lambda_p\Big(t - C_{K_{t-}} + \sum_{j=1}^{K_{t-}}\sum_{k=j}^{K_{t-}}(1-B_k)W_k\Big)$$

Intensités propres :

$$\lambda_t^N(K,U) = \sum_{j=0}^{K_{t-}} p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}} \frac{\lambda_c(t-C_j)\, e^{-\Lambda_K(t-C_j)}}{e^{-\Lambda_t^K(K,U)+\Lambda_{C_j}^K(K,U)}}\, \Psi_{j+1,K_{t-}}$$

$$\lambda_t^M(K,U) = \sum_{j=0}^{K_{t-}} p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}} \frac{\lambda_p(t-C_j)\, e^{-\Lambda_K(t-C_j)}}{e^{-\Lambda_t^K(K,U)+\Lambda_{C_j}^K(K,U)}}\, \Psi_{j+1,K_{t-}}$$

avec $\Psi_{j,k} = \Big[\prod_{i=j}^{k}(1-p_{U_i})\Big[\frac{\lambda_p(C_i-C_j)}{\lambda_{C_i}^M(K,U)}\Big]^{U_i}\Big[\frac{\lambda_c(C_i-C_j)}{\lambda_{C_i}^N(K,U)}\Big]^{1-U_i}\Big]$

et $p_{U_i} = p_p^{U_i}\, p_c^{1-U_i}$.

Fonction de vraisemblance propre :

$$
\begin{aligned}
L_t(\theta) \;=\; & \Bigg[\sum_{j=1}^{K_{t-}} p_{U_j} \Bigg[\prod_{i=j+1}^{K_{t-}} (1-p_{U_i})\lambda_p(C_i - C_j)^{U_i}\, \lambda_c(C_i - C_j)^{1-U_i}\Bigg] \\
& \qquad \Big[\lambda_p(t - C_j)^{U_{K_t}} \lambda_c(t - C_j)^{1-U_{K_t}}\}\Big)\; L_{C_j}(\theta)\Bigg] \\
& + \Bigg[\prod_{i=1}^{K_{t-}} (1-p_{U_i})\, \lambda_p(C_i)^{U_i}\, \lambda_c(C_i)^{1-U_i}\Bigg] \\
& \qquad \Big[\lambda_p(t)^{U_{K_t}}\, \lambda_c(t)^{1-U_{K_t}}\Big]^{\mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}}}\; e^{-\Lambda_K(t)}
\end{aligned}
$$

a.5/ Modèles de dépendance entre les risques

On note $\lambda_{Z_1}(t)$ et $\lambda_{Y_1}(t)$ les taux de défaillance de Y_1 et Z_1.

• Modèle à risques indépendants :

$$\boxed{\lambda_c(t) = \lambda_{Z_1}(t) \quad \text{et} \quad \lambda_p(t) = \lambda_{Y_1}(t)}$$

$\lambda_c(t) = \alpha_c \, \beta_c \, t^{\beta_c - 1}$ avec $\alpha_c > 0$ et $\beta_c \geq 1$
$\lambda_p(t) = \alpha_p \, \beta_p \, t^{\beta_p - 1}$ avec $\alpha_p > 0$ et $\beta_p \geq 1$

• Généralisation du modèle de signe aléatoire :

$U_1 \perp W_1$

$$\boxed{\lambda_c(t) = (1 - q)\lambda_{Z_1}(t) \quad \text{et} \quad \lambda_p(t) = q \, \lambda_{Z_1}(t)}$$

$q = P(U_1 = 1)$

• Modèle Langseth et Lindqvist : [03]

– hypothèse de signe aléatoire : $U_1 \perp Z_1$

– $P(Y_1 \leq y | Z_1 = z, Y_1 < Z_1) = \dfrac{\Lambda_{Z_1}(y)}{\Lambda_{Z_1}(z)}$, avec $\Lambda_{Z_1}(t) = \int_0^t \lambda_{Z_1}(s)\,ds$

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_c(t) &= \frac{(1-q)\ \lambda_{Z_1}(t)\ e^{-\Lambda_{Z_1}(t)}}{e^{-\Lambda_{Z_1}(t)} - q\ \Lambda_{Z_1}(t)\ Ie(\Lambda_{Z_1}(t))} \\ \lambda_p(t) &= \frac{q\ \lambda_{Z_1}(t)\ Ie(\Lambda_{Z_1}(t))}{e^{-\Lambda_{Z_1}(t)} - q\ \Lambda_{Z_1}(t)\ Ie(\Lambda_{Z_1}(t))}\end{aligned}}$$

$q = P(U_1 = 1)$ et $Ie(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds$

a.6/ Effets de maintenance non symétrique sur les risques

$$B_i^p = \begin{cases} 1 & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ maintenance remet à neuf le processus des MP} \\ 0 & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ maintenance est minimal sur le processus des MP} \end{cases}$$

$$B_i^c = \begin{cases} 1 & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ maintenance remet à neuf le processus des MC} \\ 0 & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ maintenance est minimal sur le processus des MC} \end{cases}$$

En C_i le processus des MP n'a pas été remis à neuf depuis :

$$A_i^p = \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=j}^{i} (1 - B_k^p) W_k$$

En C_i le processus des MC n'a pas été remis à neuf depuis :

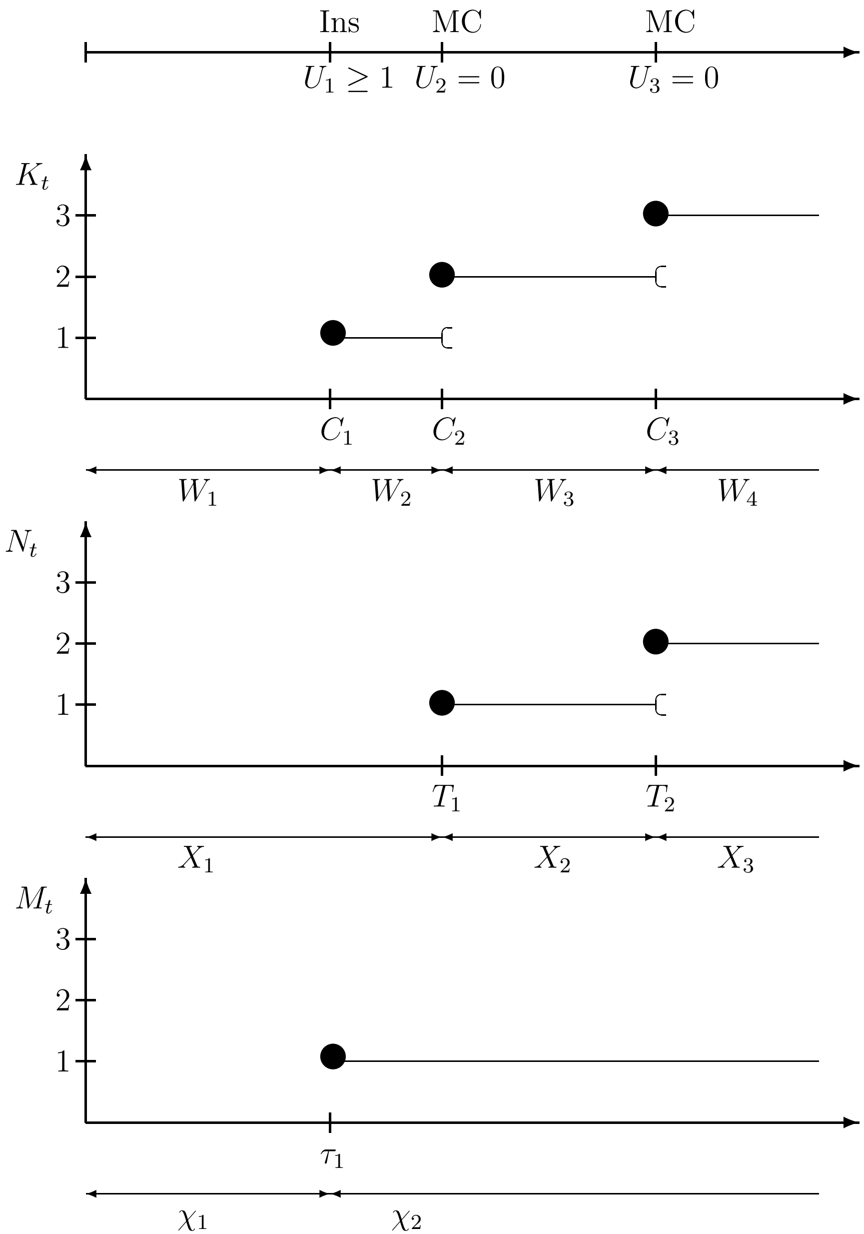
$$A_i^c = \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=j}^{i} (1 - B_k^c) W_k$$

$$\lambda_t^N(K,U,B) = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial y} S_1(y - C_{K_{t^-}} + A^p_{K_{t^-}}, z - C_{K_{t^-}} + A^c_{K_{t^-}})\right]_{(t,t)}}{S_1(t - C_{K_{t^-}} + A^p_{K_{t^-}}, t - C_{K_{t^-}} + A^c_{K_{t^-}})}$$

$$\lambda_t^M(K,U,B) = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial z} S_1(y - C_{K_{t^-}} + A^p_{K_{t^-}}, z - C_{K_{t^-}} + A^c_{K_{t^-}})\right]_{(t,t)}}{S_1(t - C_{K_{t^-}} + A^p_{K_{t^-}}, t - C_{K_{t^-}} + A^c_{K_{t^-}})}$$

L'analogie avec les travaux de Bedford-Lindqvist [04] tendrait à montrer que $S_1(y,z)$ est alors identifiable.

III. Vers un modèle d'inspections planifiées



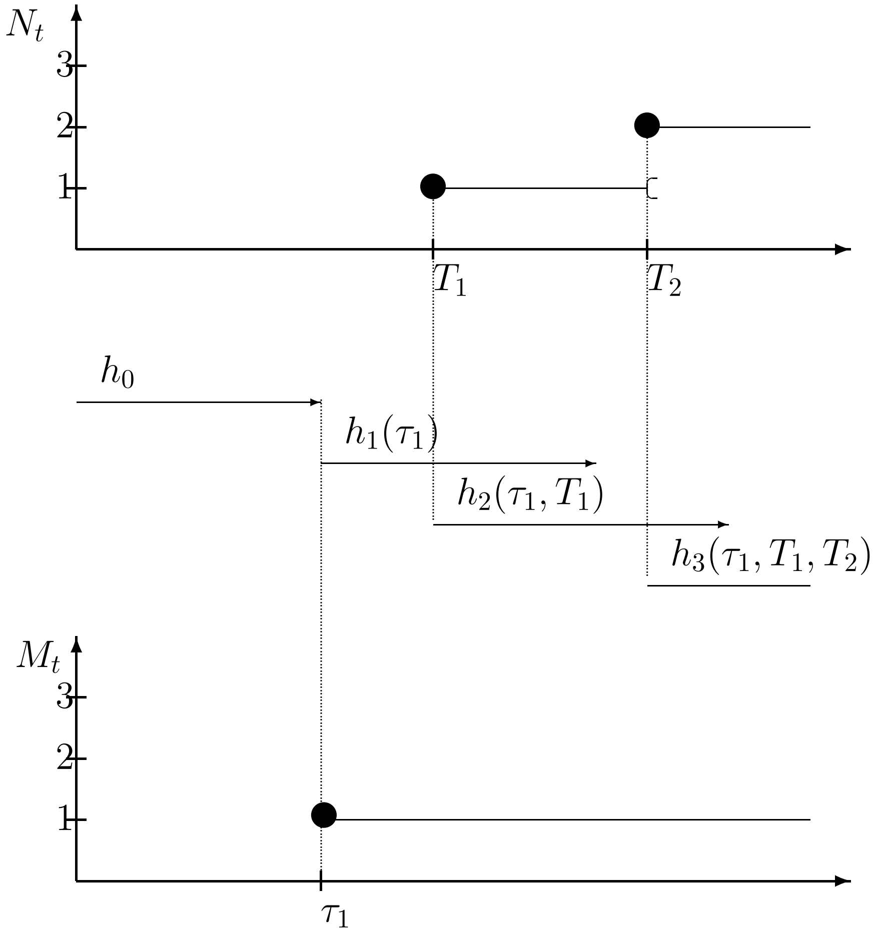
$\{N_t\}_{t\geq 0}$ processus des défaillances,

$\{M_t\}_{t\geq 0}$ processus des inspections,

$\{K_t\}_{t\geq 0}$ processus des interventions,

$$U_i = \begin{cases} 0 & \text{MC} \\ 1 & \text{Inspection avec MP} \\ 2 & \text{Inspection sans MP} \end{cases}$$

La date prévue de la prochaine inspection est une fonction déterministe du passé des observations



$$U_{K_{t-}+1} = 1 \Rightarrow$$
$$\tau_{M_{t-}+1} = C_{K_{t-}} + h_{K_{t-}}(\boldsymbol{W}_{K_{t-}}, \boldsymbol{U}_{K_{t-}})$$

avec $h_k(.)$ fonction déterministe.

On caractérise :

- le processus des défaillances par l'intensité :

$$\lambda_t^N(K,U) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t^-} = 1 \,|\, K_{t^-}, \boldsymbol{W}_{K_{t^-}}, \boldsymbol{U}_{K_{t^-}})$$

(c'est l'intensité d'un processus ponctuel auto-excité)

- le plan d'inspection par les fonctions $\{h_k(.)\}_{k \geq 0}$,

- le fait qu'une inspection conduise ou non à une MP par :

$$P_k^0 = P(U_k = 2 | U_{k+1} = 0, \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k)$$

$$P_k^1 = P(U_k = 2 | U_{k+1} \geq 1, \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k)$$

Si $U_k \geq 1$ alors :

$$P_k^0 = \frac{(1 - J_k)\, I_k\, P_k^1}{J_k + (I_k - J_k)\, P_k^1 - I_k\, J_k}$$

avec

$$I_k = \exp\Big(- \int_0^{h(\boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k)} \lambda_{C_k+s}(\boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_{k-1}, U_k = 1)\, ds\Big)$$

$$J_k = \exp\Big(- \int_0^{h(\boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_k)} \lambda_{C_k+s}(\boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{U}_{k-1}, U_k = 2)\, ds\Big)$$

Moins on fait de MP,
plus le système a de chance de tomber en panne.

Application : $\forall k \geq 0, \quad P_k^0 = P^0$

Fonction de vraisemblance :

$$L_t(\theta) = \Big[\prod_{i=1}^{K_t} \lambda_{C_i}(i-1, \boldsymbol{W}_{i-1}, \boldsymbol{U}_{i-1})^{\mathbb{1}_{\{U_i=0\}}}$$

$$\Big(\frac{[(1-I_i)P_i^0]^{U_i-1}[(1-J_i)(1-P_i^0)]^{2-U_i}}{(1-I_i)P_i^0 + (1-I_i)(1-P_i^0)} \Big)^{\mathbb{1}_{\{U_i \geq 1\}}} \Big]$$

$$\exp\Big(- \sum_{j=1}^{K_{t^-}+1} \int_{C_{j-1}}^{C_j} \lambda_s(j-1, \boldsymbol{W}_{j-1}, \boldsymbol{U}_{j-1})\, ds \Big)$$

Perspectives

– Mettre en oeuvre des méthodes bayésiennes d'estimation.

– Obtenir des propriétés de convergence des estimateurs dans le cas MC uniquement, MP planifiées, (... ?)

– Pour les modèles de MP conditionnelles :
  – Construire des modèles réalistes de dépendance entre les risques.
  – Mettre en oeuvre la procédure d'estimation avec ces modèles.
  – Etude du modèle avec effet non symétrique sur les risques de MP et MC (identifiabilité, fonction de vraisemblance, intensités propres, ...)

– Etude du modèle d'inspections planifiées et généralisation de BP à ce modèle.

– Mis en oeuvre de l'ensemble de ces modèles sur des données réelles.