Sur le modèle de Brown-Proschan avec des effets de réparations inconnus

Yann DIJOUX yann.dijoux@imag.fr
Laurent DOYEN laurent.doyen@iut2.upmf-grenoble.fr

Institut National Polytechnique de Grenoble
et Université Pierre Mendès France (Grenoble II)

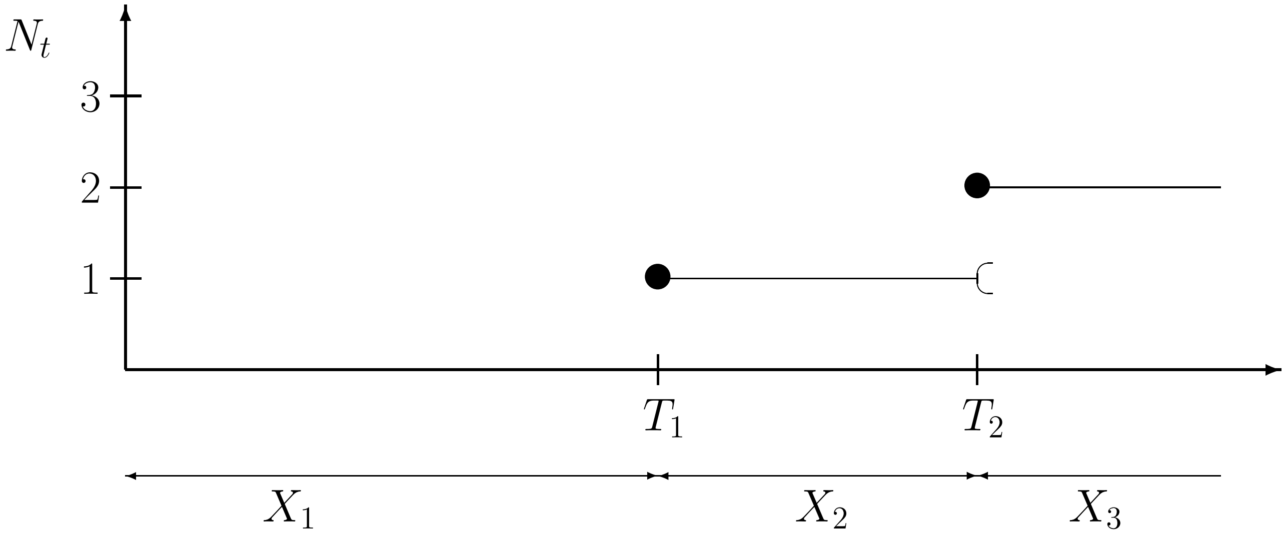
Système réparable :

Maintenance Corrective ou Réparation : Après une défaillance, a pour but de remettre le système en état de fonctionnement.

Problème : **Modéliser** et **Evaluer** l'efficacité des réparations.

I. Le modèle de Brown-Proschan

Hypothèse : Les durées de maintenance ne sont pas prises en compte.



– Instants de défaillance (= MC) : $\{T_i\}_{i\geq 1}$
– Durées inter-défaillances : $X_i = T_i - T_{i-1}$
– Nombre cumulé de défaillances survenues : $\{N_t\}_{t\geq 0}$ processus aléatoire ponctuel

a/ Modélisation stochastique du processus des défaillances

Intensité de défaillance :

$$\lambda_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t^-} = 1 | \mathcal{H}_{t^-})$$

où $\mathcal{H}_{t^-}$ est l'histoire du processus des défaillances.

Processus ponctuel auto-excité : $\mathcal{H}_{t^-} = \sigma(\{N_s\}_{0 \leq s < t})$

λ_t caractérise alors complètement le processus des défaillances :

$$P(X_{n+1} > x \mid \underbrace{\boldsymbol{T}_n}_{T_1,\ldots,T_n}) = exp\left(-\int_{T_n}^{T_n+x} \lambda_u du\right)$$

$$L_t(\theta) = \left[\prod_{i=1}^{N_t} \lambda_{T_i}\right] e^{-\Lambda_t} \qquad \text{où } \Lambda_t = \int_0^t \lambda_u \, du$$

Le système neuf a une durée de vie Z,

de taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(t < Z \leq t + \Delta t | Z > t)$$

$\lambda(t)$ est appelée **intensité initiale**
et caractérise la qualité intrinsèque du système.

$\lambda(t)$ est supposée déterministe et non identiquement nulle.
On note : $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$.

Applications : $\lambda(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1}$, avec $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

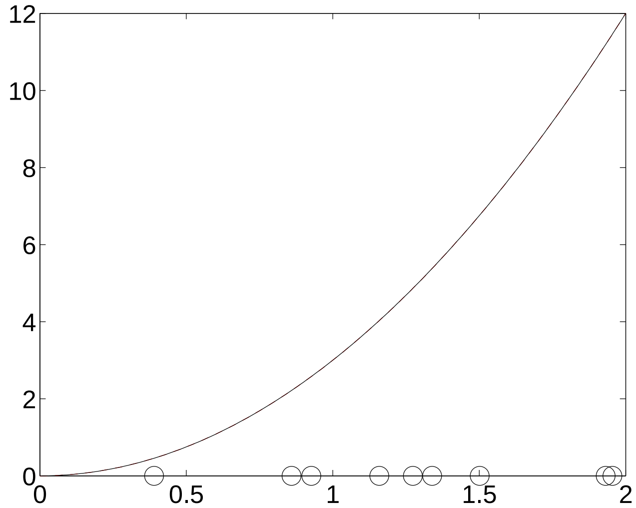
b/ Modèles basiques

Hypothèse : **"As Bad As Old"**

Réparation minimale

$\Rightarrow$ Processus de Poisson Non Homogène (NHPP) :

$$\boxed{\lambda_t = \lambda(t)}$$

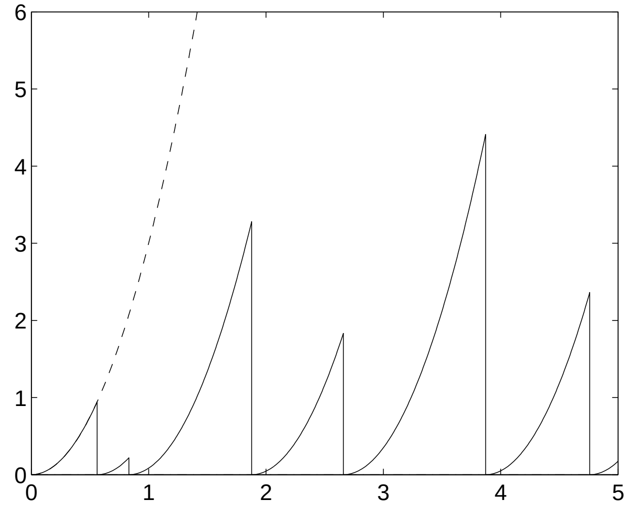


Hypothèse : **"As Good As New"**

Réparation optimale

$\Rightarrow$ Processus de Renouvellement (RP) :

$$\boxed{\lambda_t = \lambda(t - T_{N_{t^-}})}$$



En pratique, on est entre ces deux extrêmes

c/ Modèle de Brown-Proschan

Brown-Proschan [83]

Les effets de maintenance sont :

- mutuellement indépendants,
- indépendants des instants de MC précédents,
- **AGAN** avec une probabilité $\boldsymbol{p}$,
- **ABAO** avec une probabilité $\boldsymbol{1-p}$.

B_i appelé **effet de** la $i^{\text{ème}}$ **maintenance** :

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{MC AGAN} \\ 0 & \text{MC ABAO} \end{cases}$$

$$P(B_i = 1 \mid \boldsymbol{T}_i, \boldsymbol{B}_{i-1}) = P(B_i = 1) = p$$

$A_i = T_i - T_{max\{k<i|B_k=1\}}$ appelé **âge effectif** $(A_0 = 0)$,

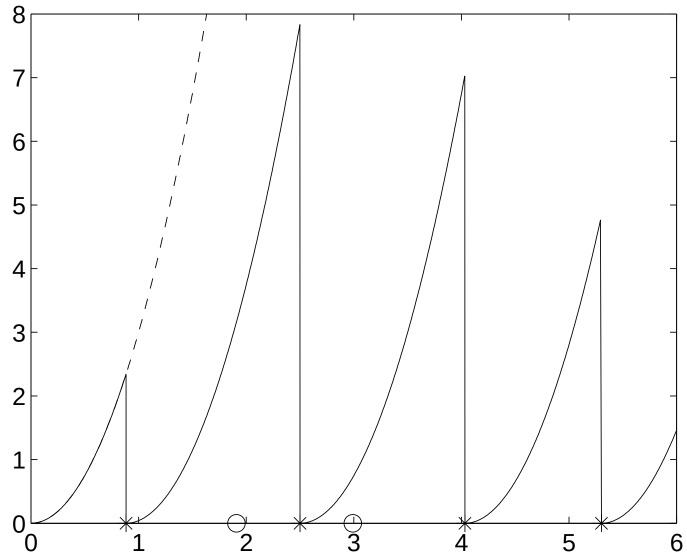
représente le temps écoulé depuis la dernière maintenance parfaite.

$$A_i = \sum_{j=1}^{i} \Big[\prod_{k=j}^{i} (1 - B_k) \Big] X_j$$

$$\boxed{\lambda_t(N,B) = \lambda\Big(t - T_{N_{t^-}} + A_{N_{t^-}}\Big)}$$

avec

$\mathcal{H}_{t^-} = \sigma(\{N_s\}_{0\leq s<t}, \{B_i\}_{1\leq i\leq N_{t^-}})$



Whitaker-Samaniego [89] :

- Si $\lambda(t)$ est constant ($\Leftrightarrow\ X_1 \sim \mathcal{E}$), alors p n'est pas identifiable.
- Estimateur non paramétrique de $F(t) = 1 - exp(-\int_0^t \lambda(s)\,ds)$ quand les B_i sont connus.

Mais, en pratique, les **$\{B_i\}_{i\geq 0}$ sont des variables cachées**

p représente l'efficacité de MC : $\begin{cases} \bullet\ \boldsymbol{p = 0} : \text{ MC ABAO} \\ \bullet\ \boldsymbol{p = 1} : \text{ MC AGAN} \\ \bullet\ \boldsymbol{0 < p < 1} : \text{ MC imparfaite} \end{cases}$

But : Estimer p quand on ne connait pas la valeur des $\boldsymbol{\{B_i\}_{i\geq 0}}$

C'est possible car : **si X_1 ne suit pas une loi exponentielle, alors p et λ sont identifiables.**

II. Estimation de l'efficacité de réparation

Lim [98] : algorithme EM

$$L_t(\theta; B) = p^{\sum_{i=1}^k B_i}(1-p)^{(k-\sum_{i=1}^k B_i)} \prod_{i=i}^k \lambda(X_i + A_{i-1}) \prod_{i=i}^k e^{-\Lambda(X_i+A_{i-1})+(1-B_i)\Lambda(A_{i-1})}$$

avec $\mathcal{H}_{t^-} = \sigma(\{N_s\}_{0\leq s<t}, \{B_i\}_{1\leq i\leq N_{t^-}})$

Algorithme EM : Construction d'une suite $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$

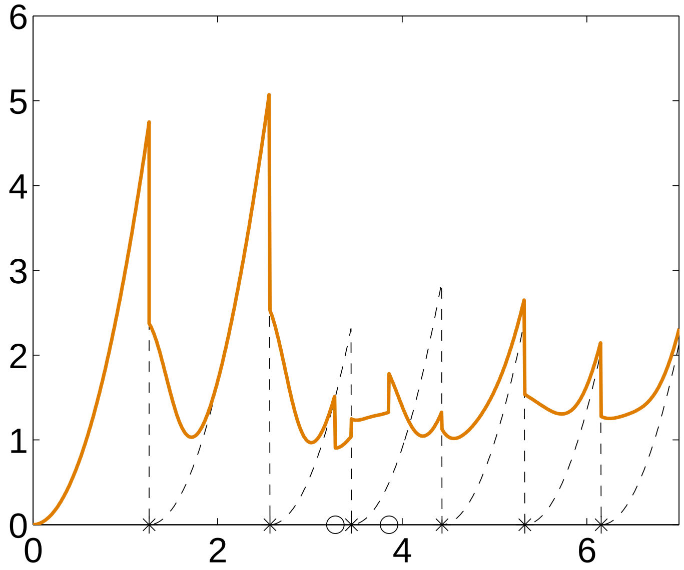
- Initialisation à un vecteur θ_0
- Etape n : $\left[\begin{array}{l} \text{Estimation : } \mathcal{Q}(\theta|\theta_n) = \mathbb{E}(ln(L_t(\theta; B)|\boldsymbol{T}_n, \theta_n) \\ \text{Maximisation : } \theta_{n+1} = \arg\max_\theta \mathcal{Q}(\theta|\theta_n) \end{array}\right.$
- Reitérer jusqu'à convergence.

a/ Caractérisation du processus des défaillances

Théorème d'innovation : $\lambda_t = E[\lambda_t^N(N,B)|\{N_s\}_{0\leq s\leq t}]$

Intensité de défaillance propre du modèle BP :

$$\lambda_t = \frac{-d}{dt}\left[ln\left(\sum_{j=0}^{N_{t-}} p^{\mathbb{1}\{j>0\}}(1-p)^{N_{t-}-j}\left[\prod_{i=j+1}^{N_{t-}} \frac{\lambda(T_i - T_j)}{\lambda_{T_i}}\right]e^{-\Lambda(t-T_j)-\Lambda_{T_j}}\right)\right]$$



— Intensité propre (λ_t)

- - Intensité relative ($\lambda_t(N,B)$)

b/ Vraisemblance propre

Langseth-Lindqvist [03] : fonction de vraisemblance fausse

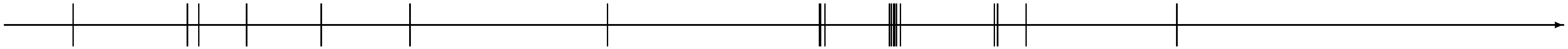
Vraisemblance propre : (forme récursive)

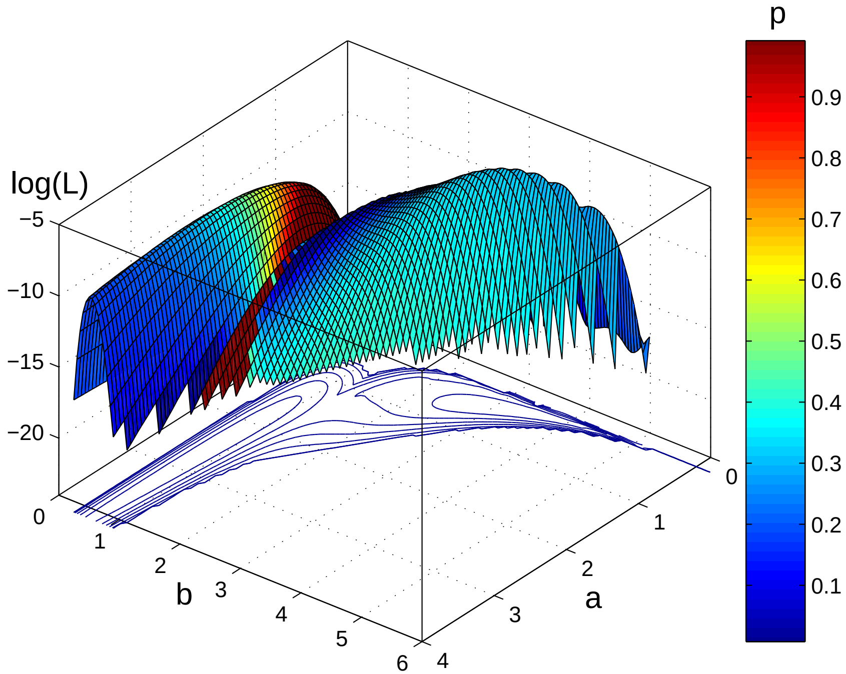
$$L_t(\theta) = (1-p)^{N_{t^-}} \Big[\prod_{i=1}^{N_{t^-}} \lambda(T_i) \Big] \lambda(t)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}} e^{-\Lambda(t)} + p \Big[\sum_{j=1}^{N_{t^-}} (1-p)^{N_{t^-}-j} \Big[\prod_{i=j+1}^{N_{t^-}} \lambda(T_i - T_j) \Big] \lambda(t-T_j)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}} e^{-\Lambda(t-T_j)} L_{T_j}(\theta) \Big]$$

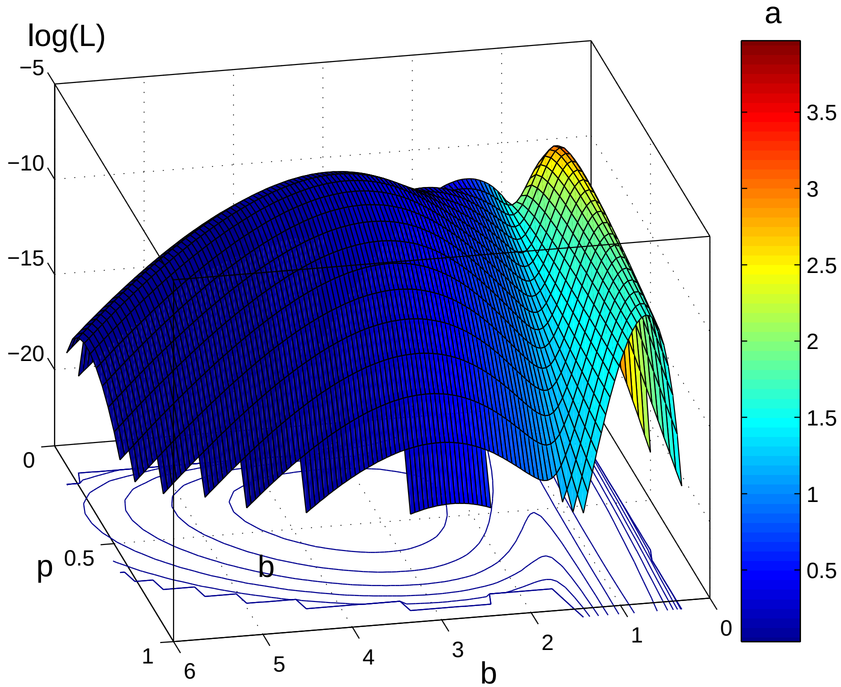
La complexité du calcul de la vraisemblance propre est en $O\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$, où n est le nombre de défaillances observées.

c/ Application à des données simulées

20 défaillances avec : $\alpha = 0.1,\ \beta = 3,\ p = 0.5$





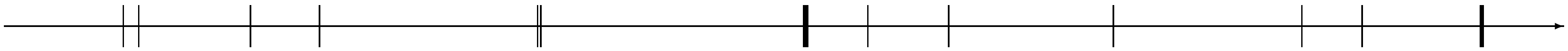


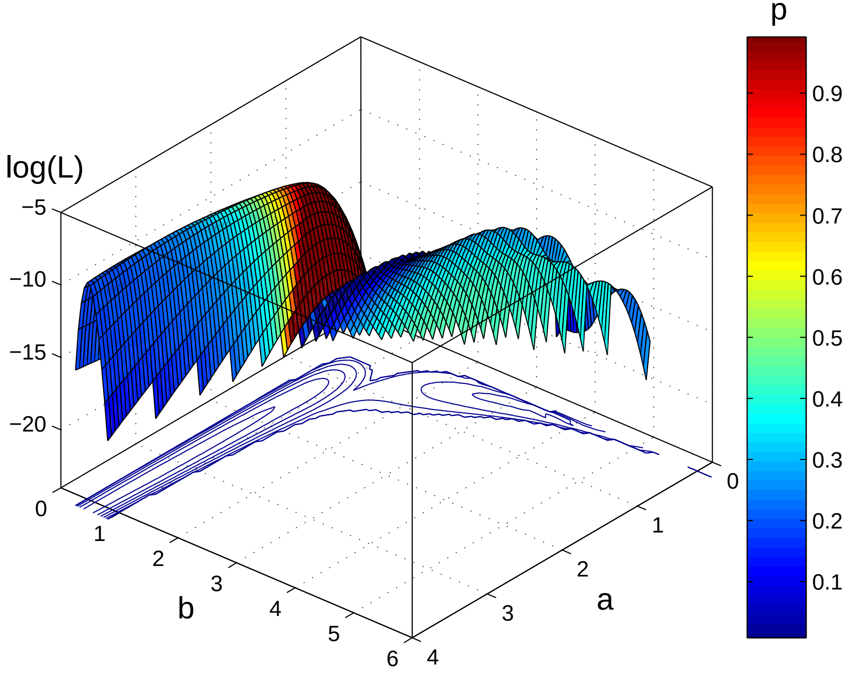
$$\hat{\alpha}_{MV} = 0.20, \quad \hat{\beta}_{MV} = 3.14, \quad \hat{p}_{MV} = 0.31$$

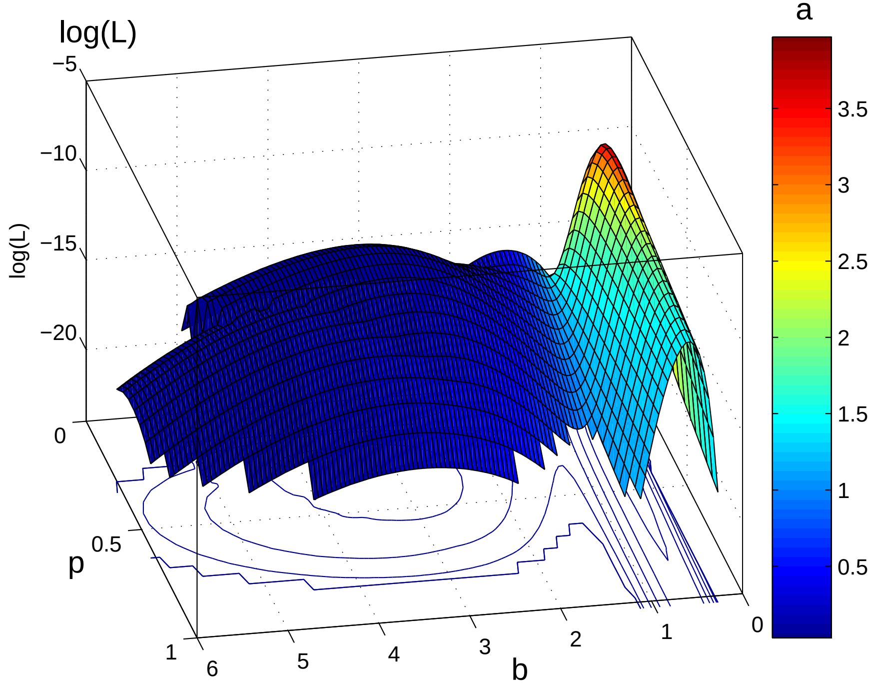
EM :

$\alpha_0 = 4,\ \beta_0 = 1.2,\ p_0 = 0.1$	$\alpha_0 = 0.8,\ \beta_0 = 4,\ p_0 = 0.1$
$\hat{\alpha} = 4.80,\ \hat{\beta} = 0.49,\ \hat{p} = 0.14$	$\hat{\alpha} = 0.33,\ \hat{\beta} = 2.76,\ \hat{p} = 0.33$

20 défaillances avec : $\alpha = 0.1$, $\beta = 3$, $p = 0.5$







$$\hat{\alpha}_{MV} = 3.21, \quad \hat{\beta}_{MV} = 0.44, \quad \hat{p}_{MV} = 0.22$$

EM :

$\alpha_0 = 4,\ \beta_0 = 1.2,\ p_0 = 0.1$	$\alpha_0 = 0.8,\ \beta_0 = 4,\ p_0 = 0.1$
$\hat{\alpha} = 4.70,\ \hat{\beta} = 0.44,\ \hat{p} = 0.09$	$\hat{\alpha} = 0.26,\ \hat{\beta} = 2.98,\ \hat{p} = 0.34$

Conclusion et perspectives

- La vraisemblance propre présente des maxima locaux

$\Rightarrow$ Signification de ces maxima locaux
$\Rightarrow$ Les paramètres sont-ils estimables ?

- Comparer les estimateurs donnés par EM et MV

$\Rightarrow$ Développer une méthode de maximisation efficace de la vraisemblance propre

- Dans les cas pratiques avec des MC uniquement : $p \approx 0$ ou $p \approx 1$, pas de cas intermédiaire.

$\Rightarrow$ Prendre en compte simultanément MC et MP