

# Estimation des paramètres d'un modèle de fiabilité avec réparations alternées

GASMI SOFIANE

Université de Tunis

Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis

14 juin 2012

# Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Le Modèle général
- 3 Le modèle de fiabilité avec réparations alternées
- 4 Estimation des paramètres
- 5 Distribution des durées inter-défaillances
- 6 Estimation de l'information de Fisher
- 7 Région de confiance simultanée
- 8 Illustration numérique et simulation

## Introduction

### Les stratégies de réparation

- Réparation parfaite (as good as new) : (RP)
- Réparation minimale (as bad as old) : (RM)
- Réparation imparfaite : (RI)

## Introduction

- ▷ Bathe & Franz (1996)
- ▷ Last & Szekli (1995,1998)
- ▷ Kijima (1989)
- ▷ Baxter & al. (1996)
- ▷ Brown & Proschan (1983)
- ▷ Kahle(1991)
- ▷ Block & al. (1993)
- ▷ Stadle & Zuckerman (1991)

# Introduction

- **But:** Etablir les statistiques des modèles généraux pour les systèmes réparables
- **Concept:** “âge virtuel”  
Les premiers qui ont découvert ce processus sont *Malik* (1979), *Kijima, Morimura et Suzuki* (1988), *Kijima* (1989) et *Stadje & Zuckerman* (1991).
- **Avantages**
  - flexibilité pour la modélisation des processus de défaillances et réparations d'un système réparable.
  - une meilleure représentation des modèles statistiques de la situation réelle.

# Introduction

## Modèles de base

- 1 Modèle de maintenance minimale
- 2 Modèle de maintenance parfaite

# Introduction

## Modèles de base

- 1 Modèle de maintenance minimale
- 2 Modèle de maintenance parfaite

# Introduction

## Modèles de base

- 1 Modèle de maintenance minimale
- 2 Modèle de maintenance parfaite

## Introduction

### Modèle de maintenance minimale

- effet de maintenance est de remettre le système en fonctionnement dans le même état juste avant la panne.
- le système est dit **(ABAO)**.
- l'intensité de défaillance  $\lambda(t)$  ne dépend pas du passé du processus.

## Modèle de maintenance minimale

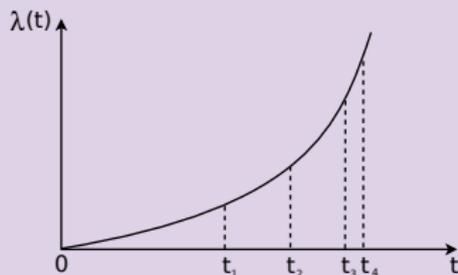


Figure: Intensité de panne dans le cas RM

# Introduction

## Modèle de maintenance parfaite

- effet de maintenance est de remettre le système en fonctionnement dans le même état que neuf.
- le système est dit (AGAN).
- les durées inter-fonctionnement sont indépendantes et de même loi.
- l'intensité de défaillance  $\lambda(t)$  dépend du passé du processus.

## Modèle de maintenance parfaite

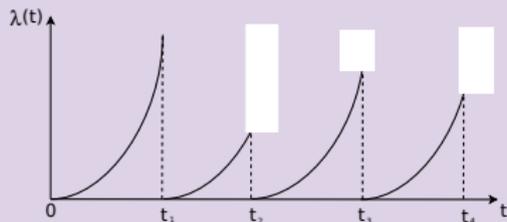


Figure: Intensité de panne dans le cas RP

# Introduction

## La maintenance imparfaite

- En pratique, on est entre les deux cas extrêmes:
  - maintenance minimale (ABAO)
  - maintenance parfaite (AGAN)
- Les systèmes industriels sont difficiles à remettre à neuf après la maintenance
- Dans l'industrie la maintenance a un effet plus que minimal

# Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Le Modèle général**
- 3 Le modèle de fiabilité avec réparations alternées
- 4 Estimation des paramètres
- 5 Distribution des durées inter-défaillances
- 6 Estimation de l'information de Fisher
- 7 Région de confiance simultanée
- 8 Illustration numérique et simulation

# Le Modèle général

## Déscription du modèle général de Last & Szekli (1998)

$$\lambda_1(t) = \lambda(t) \quad \text{pour } t \in [0, t_1).$$

▷ Panne en  $t_1$  → Rép. avec deg.  $z_1 \in [0, 1]$

$$\hat{\text{âge virtuel en } t_1} \rightarrow V_1 = (1 - z_1)t_1.$$

$$\lambda_2(t) = \lambda(t - t_1 + V_1) \quad \text{avec } t \in [t_1, t_2).$$

▷ Panne en  $t_2$  → Rép. avec deg.  $z_2 \in [0, 1]$

$$\hat{\text{âge virtuel en } t_2} \rightarrow V_2 = (1 - z_2)(V_1 + t_2 - t_1).$$

## Déscription du modèle général de Last & Szekli (1998)

$$\lambda_{k+1}(t) = \lambda(t - t_k + V_k) \quad \text{pour } t_k \leq t < t_{k+1}$$

$$V_k = (1 - z_k)(V_{k-1} + t_k - t_{k-1}), \quad V_0 := 0; t_0 := 0;$$

## Definition

$V(t) := t - t_k + V_k$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k \geq 1$ , est le processus d'âge virtuel.

# Le Modèle général

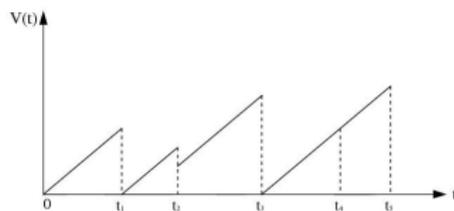


Figure: Processus d'âge virtuel

# Le Modèle général

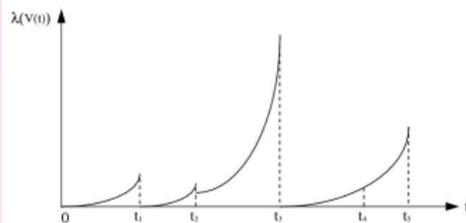


Figure: Intensité de panne

# Le Modèle général

## Cas particuliers du modèle

- Modèle de maintenance parfaite
- Modèle de maintenance minimale
- Modèle de Kijima (1989)
- Modèle de Brown et Proschan (1983)
- Modèle Stadje et Zuckerman (1991)
- Modèle de fiabilité avec réparations alternées (Gasmi (2011))

# Le Modèle général

## Cas particuliers du modèle

- Modèle de maintenance parfaite
- Modèle de maintenance minimale
- Modèle de Kijima (1989)
- Modèle de Brown et Proschan (1983)
- Modèle Stadje et Zuckerman (1991)
- Modèle de fiabilité avec réparations alternées (Gasmi (2011))

# Le Modèle général

## Cas particuliers du modèle

- Modèle de maintenance parfaite
- Modèle de maintenance minimale
- Modèle de Kijima (1989)
- Modèle de Brown et Proschan (1983)
- Modèle Stadje et Zuckerman (1991)
- Modèle de fiabilité avec réparations alternées (Gasmi (2011))

# Le Modèle général

## Cas particuliers du modèle

- Modèle de maintenance parfaite
- Modèle de maintenance minimale
- Modèle de Kijima (1989)
- Modèle de Brown et Proschan (1983)
- Modèle Stadje et Zuckerman (1991)
- Modèle de fiabilité avec réparations alternées (Gasmi (2011))

# Le Modèle général

## Cas particuliers du modèle

- Modèle de maintenance parfaite
- Modèle de maintenance minimale
- Modèle de Kijima (1989)
- Modèle de Brown et Proschan (1983)
- Modèle Stadje et Zuckerman (1991)
- Modèle de fiabilité avec réparations alternées (Gasmi (2011))

# Le Modèle général

## Cas particuliers du modèle

- Modèle de maintenance parfaite
- Modèle de maintenance minimale
- Modèle de Kijima (1989)
- Modèle de Brown et Proschan (1983)
- Modèle Stadje et Zuckerman (1991)
- Modèle de fiabilité avec réparations alternées (Gasmi (2011))

# Le Modèle général

## Cas particuliers du modèle

- Modèle de maintenance parfaite
- Modèle de maintenance minimale
- Modèle de Kijima (1989)
- Modèle de Brown et Proschan (1983)
- Modèle Stadje et Zuckerman (1991)
- Modèle de fiabilité avec réparations alternées (Gasmi (2011))

# Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Le Modèle général
- 3 Le modèle de fiabilité avec réparations alternées**
- 4 Estimation des paramètres
- 5 Distribution des durées inter-défaillances
- 6 Estimation de l'information de Fisher
- 7 Région de confiance simultanée
- 8 Illustration numérique et simulation

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Description

- 1 Les durées de réparation sont supposées négligeables.
- 2 l'intensité de défaillance du système est du type Weibull:

$$\lambda(x, \theta) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \alpha > 0, \beta > 0,$$

avec  $\theta = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha$  paramètre d'échelle,  $\beta$  paramètre de forme.

- Après la première panne on a toujours une séquence de réparation alternée (réparation imparfaite avec degré  $c$  / réparation parfaite)

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Déscription

- 1 Les durées de réparation sont supposées négligeables.
- 2 l'intensité de défaillance du système est du type Weibull:

$$\lambda(x, \theta) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \alpha > 0, \beta > 0,$$

avec  $\theta = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha$  paramètre d'échelle,  $\beta$  paramètre de forme.

- Après la première panne on a toujours une séquence de réparation alternée (réparation imparfaite avec degré  $c$  / réparation parfaite)

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Déscription

- 1 Les durées de réparation sont supposées négligeables.
- 2 l'intensité de défaillance du système est du type Weibull:

$$\lambda(x, \theta) = \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{x}{\alpha} \right)^{\beta-1}, \alpha > 0, \beta > 0,$$

avec  $\theta = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha$  paramètre d'échelle,  $\beta$  paramètre de forme.

- 3 Après la première panne on a toujours une séquence de réparation alternée (réparation imparfaite avec degré  $c$  / réparation parfaite)

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Déscription

- 1 Les durées de réparation sont supposées négligeables.
- 2 l'intensité de défaillance du système est du type Weibull:

$$\lambda(x, \theta) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \alpha > 0, \beta > 0,$$

avec  $\theta = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha$  paramètre d'échelle,  $\beta$  paramètre de forme.

- 3 Après la première panne on a toujours une séquence de réparation alternée (réparation imparfaite avec degré  $c$  / réparation parfaite)

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Déscription

- 1 Les durées de réparation sont supposées négligeables.
- 2 l'intensité de défaillance du système est du type Weibull:

$$\lambda(x, \theta) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \alpha > 0, \beta > 0,$$

avec  $\theta = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha$  paramètre d'échelle,  $\beta$  paramètre de forme.

- 3 Après la première panne on a toujours une séquence de réparation alternée (réparation imparfaite avec degré  $c$  / réparation parfaite)

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Description

- 1 Les durées de réparation sont supposées négligeables.
- 2 l'intensité de défaillance du système est du type Weibull:

$$\lambda(x, \theta) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \alpha > 0, \beta > 0,$$

avec  $\theta = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha$  paramètre d'échelle,  $\beta$  paramètre de forme.

- 3 Après la première panne on a toujours une séquence de réparation alternée (réparation imparfaite avec degré  $c$  / réparation parfaite)

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Déscription

- 1 Les durées de réparation sont supposées négligeables.
- 2 l'intensité de défaillance du système est du type Weibull:

$$\lambda(x, \theta) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \alpha > 0, \beta > 0,$$

avec  $\theta = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha$  paramètre d'échelle,  $\beta$  paramètre de forme.

- 3 Après la première panne on a toujours une séquence de réparation alternée (réparation imparfaite avec degré  $c$  / réparation parfaite)

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Déscription

- 1 Les durées de réparation sont supposées négligeables.
- 2 l'intensité de défaillance du système est du type Weibull:

$$\lambda(x, \theta) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \alpha > 0, \beta > 0,$$

avec  $\theta = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha$  paramètre d'échelle,  $\beta$  paramètre de forme.

- 3 Après la première panne on a toujours une séquence de réparation alternée (réparation imparfaite avec degré  $c$  / réparation parfaite)

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Description

- $(t_k)_{k=1,2,\dots}$  instants de défaillances
- $(z'_k)_{k=1,2,\dots}$  degrés de réparations.
- $N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}(t_k \leq t)$  le nombre de défaillances jusqu'à  $t$ , avec  $\mathbf{1}(A)$  est la fonction indicatrice de  $A$

On pose  $z_k = 1 - z'_k$  dans le modèle général

- ◇  $z'_k$  prend la valeur 0 pour la réparation parfaite
- ◇  $z'_k$  prend la valeur  $c$  pour la réparation imparfaite ( $0 < c < 1$ )

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Description

- $(t_k)_{k=1,2,\dots}$  instants de défaillances
- $(z'_k)_{k=1,2,\dots}$  degrés de réparations.
- $N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}(t_k \leq t)$  le nombre de défaillances jusqu'à  $t$ , avec  $\mathbf{1}(A)$  est la fonction indicatrice de  $A$

On pose  $z_k = 1 - z'_k$  dans le modèle général

- ◇  $z'_k$  prend la valeur 0 pour la réparation parfaite
- ◇  $z'_k$  prend la valeur  $c$  pour la réparation imparfaite ( $0 < c < 1$ )

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Description

- Le processus d'âge virtuel est donné par:

$$V(t) = \begin{cases} t - t_{2k-2} & , \quad t_{2k-2} \leq t < t_{2k-1} \\ t - [(1-c)t_{2k-1} + ct_{2k-2}] & , \quad t_{2k-1} \leq t < t_{2k} \end{cases}$$

( $k = 1, 2, \dots$ ).

- On obtient alors le modèle de fiabilité avec réparations alternées.

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Description

- Le processus d'âge virtuel est donné par:

$$V(t) = \begin{cases} t - t_{2k-2} & , \quad t_{2k-2} \leq t < t_{2k-1} \\ t - [(1 - c)t_{2k-1} + ct_{2k-2}] & , \quad t_{2k-1} \leq t < t_{2k} \end{cases}$$

$(k = 1, 2, \dots)$ .

- On obtient alors le modèle de fiabilité avec réparations alternées.

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Description

- Le processus d'âge virtuel est donné par:

$$V(t) = \begin{cases} t - t_{2k-2} & , \quad t_{2k-2} \leq t < t_{2k-1} \\ t - [(1 - c)t_{2k-1} + ct_{2k-2}] & , \quad t_{2k-1} \leq t < t_{2k} \end{cases}$$

( $k = 1, 2, \dots$ ).

- On obtient alors le modèle de fiabilité avec réparations alternées.

## Remarque

- 1 Si  $c = 0 \rightarrow$  seulement des réparations parfaites (PR)
- 2 Si  $c = 1 \rightarrow$  alternance entre réparation minimale et réparation parfaite.
- 3 Si  $0 < c < 1 \rightarrow$  alternance entre réparation imparfaite avec degré  $c$  et réparation parfaite.

## Remarque

- 1 Si  $c = 0 \rightarrow$  *seulement des réparations parfaites (PR)*
- 2 Si  $c = 1 \rightarrow$  *alternance entre réparation minimale et réparation parfaite.*
- 3 Si  $0 < c < 1 \rightarrow$  *alternance entre réparation imparfaite avec degré  $c$  et réparation parfaite.*

## Remarque

- 1 Si  $c = 0 \rightarrow$  seulement des réparations parfaites (PR)
- 2 Si  $c = 1 \rightarrow$  alternance entre réparation minimale et réparation parfaite.
- 3 Si  $0 < c < 1 \rightarrow$  alternance entre réparation imparfaite avec degré  $c$  et réparation parfaite.

## Remarque

- 1 Si  $c = 0 \rightarrow$  seulement des réparations parfaites (PR)
- 2 Si  $c = 1 \rightarrow$  alternance entre réparation minimale et réparation parfaite.
- 3 Si  $0 < c < 1 \rightarrow$  alternance entre réparation imparfaite avec degré  $c$  et réparation parfaite.

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Description

On considère le processus aléatoire ponctuel  $\Phi = ((t_k, z'_k))$  caractérisé par la donnée de:

- 1 "the counting process"  $\{N(t), t \geq 0\}$  d'intensité de défaillance  $\lambda(V(t), \theta)$   
avec  $V(t) := t - t_k + V_k$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  est le processus d'âge virtuel
- 2 les marques  $z'_k$ , degrés de réparations aux instants  $t_k$ .

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Description

On considère le processus aléatoire ponctuel  $\Phi = ((t_k, z'_k))$  caractérisé par la donnée de:

- 1 "the counting process"  $\{N(t), t \geq 0\}$  d'intensité de défaillance  $\lambda(V(t), \theta)$   
avec  $V(t) := t - t_k + V_k$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  est le processus d'âge virtuel
- 2 les marques  $z'_k$ , degrés de réparations aux instants  $t_k$ .

# Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

## Déscription

On considère le processus aléatoire ponctuel  $\Phi = ((t_k, z'_k))$  caractérisé par la donnée de:

- 1 "the counting process"  $\{N(t), t \geq 0\}$  d'intensité de défaillance  $\lambda(V(t), \theta)$   
avec  $V(t) := t - t_k + V_k$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  est le processus d'âge virtuel
- 2 les marques  $z'_k$ , degrés de réparations aux instants  $t_k$ .

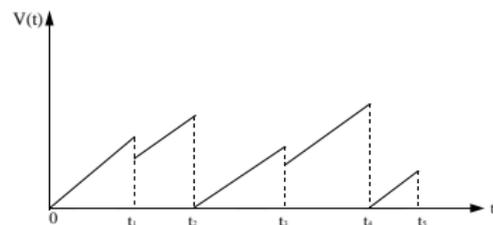


Figure: Processus d'âge virtuel

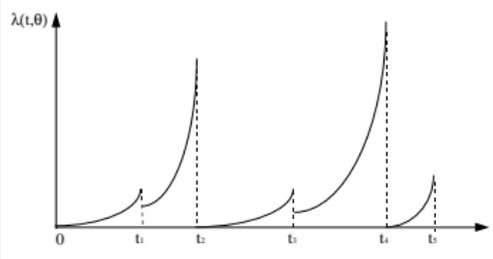


Figure: Intensité de panne

## Notations

- Soit  $N_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}\{t_k \leq t\} \mathbf{1}\{z'_k = c\}$  le nombre de réparations imparfaites jusqu'à  $t$ .
- Soit  $N_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}\{t_k \leq t\}$  le nombre de réparations parfaites jusqu'à  $t$ .
- Soit  $K(t) = N_1(t) - N_2(t)$ , (détermine le type de la dernière réparation)
  - ▷ Si  $K(t) = 0$ , alors la dernière réparation est parfaite
  - ▷ Si  $K(t) = 1$ , alors la dernière réparation est imparfaite

# Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Le Modèle général
- 3 Le modèle de fiabilité avec réparations alternées
- 4 Estimation des paramètres**
- 5 Distribution des durées inter-défaillances
- 6 Estimation de l'information de Fisher
- 7 Région de confiance simultanée
- 8 Illustration numérique et simulation

# Estimation des paramètres

## fonction LL

La fonction LL pour le processus ponctuel a la forme (Liptser et Shiriyayev (1978))

$$\ln L(t; \theta) = \sum_{k=1}^{N(t)} \ln \lambda(V(t_k-)) - \int_0^t \lambda(V(s)) ds,$$

avec  $V(t_k-) = t_k - t_{k-1} + V_{k-1}$ .

# Estimation des paramètres

## fonction LL

On obtient:

$$\ln L(t; \theta) = N(t) \left( \ln \beta - \beta \ln \alpha \right) + (\beta - 1) \left\{ \sum_{k=1}^{N_1(t)} \ln(t_{2k-1} - t_{2k-2}) \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{N_2(t)} \ln(t_{2k} - (1-c)t_{2k-1} - ct_{2k-2}) \right\} - \int_0^t \lambda(V(s)) ds.$$

Pour calculer  $I = \int_0^t \lambda(V(s)) ds$  on peut utiliser la linéarité de  $V(s)$  entre deux instants de défaillances successifs:

$$I = \sum_{k=1}^{N_1(t)} \left( \frac{t_{2k-1} - t_{2k-2}}{\alpha} \right)^\beta + \sum_{k=1}^{N_2(t)} \left\{ \left( \frac{t_{2k} - (1-c)t_{2k-1} - ct_{2k-2}}{\alpha} \right)^\beta - \left( \frac{c(t_{2k-1} - t_{2k-2})}{\alpha} \right)^\beta \right\} + \mathbf{1}\{K(t) = 0\} \left( \frac{t - t_{N(t)}}{\alpha} \right)^\beta + \mathbf{1}\{K(t) = 1\} \left[ \left( \frac{t - (1-c)t_{N(t)} - ct_{N(t)-1}}{\alpha} \right)^\beta - \left( \frac{c(t_{N(t)} - t_{N(t)-1})}{\alpha} \right)^\beta \right]$$

Pour calculer  $I = \int_0^t \lambda(V(s))ds$  on peut utiliser la linéarité de  $V(s)$  entre deux instants de défaillances successifs:

$$\begin{aligned}
 I = & \sum_{k=1}^{N_1(t)} \left( \frac{t_{2k-1} - t_{2k-2}}{\alpha} \right)^\beta + \sum_{k=1}^{N_2(t)} \left\{ \left( \frac{t_{2k} - (1-c)t_{2k-1} - ct_{2k-2}}{\alpha} \right)^\beta \right. \\
 & \left. - \left( \frac{c(t_{2k-1} - t_{2k-2})}{\alpha} \right)^\beta \right\} + \mathbf{1}\{K(t) = 0\} \left( \frac{t - t_{N(t)}}{\alpha} \right)^\beta + \\
 & \mathbf{1}\{K(t) = 1\} \left[ \left( \frac{t - (1-c)t_{N(t)} - ct_{N(t)-1}}{\alpha} \right)^\beta - \left( \frac{c(t_{N(t)} - t_{N(t)-1})}{\alpha} \right)^\beta \right]
 \end{aligned}$$

## Estimation des paramètres

Les MLE des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont obtenues par la résolution du système non linéaire:

$$\frac{\partial \ln L(t; \theta)}{\partial \alpha} = 0 \text{ et } \frac{\partial \ln L(t; \theta)}{\partial \beta} = 0.$$

- L'estimation du paramètre d'échelle  $\alpha$  est explicite:

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{B_1(t, \hat{\beta})}{N(t)} \right)^{1/\hat{\beta}}$$

avec

$$B_1(t, \beta) = \sum_{k=1}^{N_1(t)} (t_{2k-1} - t_{2k-2})^\beta + \sum_{k=1}^{N_2(t)} \left\{ (t_{2k} - (1-c)t_{2k-1} - ct_{2k-2})^\beta - (c(t_{2k-1} - t_{2k-2}))^\beta \right\} + \mathbf{1}\{K(t) = 0\} (t - t_{N(t)})^\beta + \mathbf{1}\{K(t) = 1\} \left\{ (t - (1-c)t_{N(t)} - ct_{N(t)-1})^\beta - (c(t_{N(t)} - t_{N(t)-1}))^\beta \right\}$$

- L'estimation du paramètre d'échelle  $\alpha$  est explicite:

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{B_1(t, \hat{\beta})}{N(t)} \right)^{1/\hat{\beta}}$$

avec

$$B_1(t, \beta) = \sum_{k=1}^{N_1(t)} (t_{2k-1} - t_{2k-2})^\beta + \sum_{k=1}^{N_2(t)} \left\{ (t_{2k} - (1-c)t_{2k-1} - ct_{2k-2})^\beta - (c(t_{2k-1} - t_{2k-2}))^\beta \right\} + \mathbf{1}\{K(t) = 0\} (t - t_{N(t)})^\beta + \mathbf{1}\{K(t) = 1\} \left\{ (t - (1-c)t_{N(t)} - ct_{N(t)-1})^\beta - (c(t_{N(t)} - t_{N(t)-1}))^\beta \right\}$$

- L'estimation du paramètre de forme  $\beta$  est obtenue après la résolution numérique de l'équation:

$$\frac{1}{\hat{\beta}} + \frac{1}{N(t)} \left\{ \sum_{k=1}^{N_1(t)} \ln(t_{2k} - t_{2k-2}) + \sum_{k=1}^{N_2(t)} \ln(t_{2k} - (1-c)t_{2k-1} - ct_{2k-2}) \right\} - \frac{B_2(t, \hat{\beta})}{B_1(t, \hat{\beta})} = 0.$$

- L'estimation du paramètre de forme  $\beta$  est obtenue après la résolution numérique de l'équation:

$$\frac{1}{\hat{\beta}} + \frac{1}{N(t)} \left\{ \sum_{k=1}^{N_1(t)} \ln(t_{2k} - t_{2k-2}) + \sum_{k=1}^{N_2(t)} \ln(t_{2k} - (1-c)t_{2k-1} - ct_{2k-2}) \right\} - \frac{B_2(t, \hat{\beta})}{B_1(t, \hat{\beta})} = 0.$$

avec

$$\begin{aligned}
 B_2(t, \beta) &= \sum_{k=1}^{N_1(t)} (t_{2k-1} - t_{2k-2})^\beta \ln(t_{2k-1} - t_{2k-2}) \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_2(t)} \left\{ (t_{2k} - (1-c)t_{2k-1} - ct_{2k-2})^\beta \cdot \ln(t_{2k} - (1-c)t_{2k-1} - ct_{2k-2}) \right. \\
 &\quad \left. - (c(t_{2k-1} - t_{2k-2}))^\beta \ln(c(t_{2k-1} - t_{2k-2})) \right\} + \mathbf{1}\{K(t) = 1\} \\
 &\quad \left\{ (t - (1-c)t_{N(t)} - ct_{N(t)-1})^\beta \ln(t - (1-c)t_{N(t)} - ct_{N(t)-1}) \right. \\
 &\quad \left. - (c(t_{N(t)} - t_{N(t)-1}))^\beta \ln(c(t_{N(t)} - t_{N(t)-1})) \right\} \\
 &+ \mathbf{1}\{K(t) = 0\} \left\{ (t - t_{N(t)})^\beta \ln(t - t_{N(t)}) \right\}.
 \end{aligned}$$

Introduction

Le Modèle général

Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

Estimation des paramètres

**Distribution des durées inter-défaillances**

Estimation de l'information de Fisher

Région de confiance simultanée

Illustration numérique et simulation

# Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Le Modèle général
- 3 Le modèle de fiabilité avec réparations alternées
- 4 Estimation des paramètres
- 5 Distribution des durées inter-défaillances**
- 6 Estimation de l'information de Fisher
- 7 Région de confiance simultanée
- 8 Illustration numérique et simulation

## Distribution des durées inter-défaillances

- Soient  $X_k = t_k - t_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  les durées inter-défaillances.
- On considère  $\beta > 1 \rightarrow$  l'intensité de défaillance  $\lambda(V(t), \theta)$  est croissante.

### Hypothèse

*On suppose que le modèle de réparation (Failure-repair model) est défini jusqu'à l'instant de défaillance  $t = t_{k-1}$ .*

# Distribution des durées inter-défaillances

## Proposition

Soit  $X_k = t_k - t_{k-1}$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ), la  $k^{\text{eme}}$  durée inter-défaillance et soit  $t^*$  ( $t^* \geq t_{k-1}$ ) fixé. Alors on obtient:

$$P(X_k \geq u \mid X_k \geq t^* - t_{k-1}) = \exp \left\{ -\alpha^{-\beta} \left[ (u + z'_k(t_{k-1} - t_{k-2}))^\beta - (t^* - t_{k-1} + z'_k(t_{k-1} - t_{k-2}))^\beta \right] \right\},$$

avec  $u \geq t^* - t_{k-1}$ .

# Distribution des durées inter-défaillances

## Résultat

- Si  $z'_k = 0$  ,  $k = 1, 2, \dots$ , alors la durée inter-défaillance  $X_k$ , après une réparation parfaite, suit **une distribution de Weibull**.
- Si  $z'_k \in (0, 1)$  ,  $k = 1, 2, \dots$ , alors  $X_k$  suit **une distribution de Weibull tronquée**.

$$f_{X_k}(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0, \\ \frac{\beta}{\alpha^\beta} (u + z'_k (t_{k-1} - t_{k-2}))^{\beta-1} \cdot \exp \left\{ -\alpha^{-\beta} [(u + z'_k (t_{k-1} - t_{k-2}))^\beta - (z'_k (t_{k-1} - t_{k-2}))^\beta] \right\}, & u > 0. \end{cases}$$

# Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Le Modèle général
- 3 Le modèle de fiabilité avec réparations alternées
- 4 Estimation des paramètres
- 5 Distribution des durées inter-défaillances
- 6 Estimation de l'information de Fisher**
- 7 Région de confiance simultanée
- 8 Illustration numérique et simulation

## Estimation de l'information de Fisher

- Comme le vecteur  $\theta = (\alpha, \beta)$  n'est pas obtenu explicitement, il est impossible de trouver la distribution exacte du MLE.
- On donne une approximation de la matrice d'information de Fisher  $I(\theta)$ .
- Soit  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  avec  $\theta_1 = \alpha$  et  $\theta_2 = \beta$ .
- L'élément de la matrice  $I(\theta)$ ,  
 $I_{rs}(\theta)$ ,  $r, s \in \{1, 2\}$ , peut être approximé par:

$$I_{rs}(\hat{\theta}) = -\frac{\partial^2 \ln L(x, \hat{\theta})}{\partial \theta_r \partial \theta_s}$$

## Estimation de l'information de Fisher

- La matrice d'information de Fisher observée est donnée par:

$$I = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \ln L(x, \theta)}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 \ln L(x, \theta)}{\partial \alpha \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 \ln L(x, \theta)}{\partial \beta \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 \ln L(x, \theta)}{\partial \beta^2} \end{pmatrix}$$

- On peut approximer la matrice de variance-covariance et on obtient:

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = I^{-1}$$

## Estimation de l'information de Fisher

- La distribution asymptotique du MLE  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$  est donnée par:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \right)$$

- Si on remplace les paramètres  $\alpha, \beta$  par leurs correspondants MLE on obtient alors une estimation de  $V$ , notée  $\hat{V}$ :

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \widehat{l_{11}} & \widehat{l_{12}} \\ \widehat{l_{21}} & \widehat{l_{22}} \end{pmatrix}^{-1}$$

avec  $\widehat{l_{ij}} = l_{ij}$  sont obtenus si on remplace  $(\alpha, \beta)$  par  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ .

## Estimation de l'information de Fisher

- On obtient les  $100(1 - \nu)\%$  intervalles de confiance des paramètres  $\alpha, \beta$  suivants:

$$\hat{\alpha} \pm z_{\frac{\nu}{2}} \sqrt{\widehat{V}_{11}}, \quad \hat{\beta} \pm z_{\frac{\nu}{2}} \sqrt{\widehat{V}_{22}},$$

avec  $z_{\frac{\nu}{2}}$  est le  $\frac{\nu}{2}$ -te percentile la loi  $N(0, 1)$ .

# Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Le Modèle général
- 3 Le modèle de fiabilité avec réparations alternées
- 4 Estimation des paramètres
- 5 Distribution des durées inter-défaillances
- 6 Estimation de l'information de Fisher
- 7 Région de confiance simultanée**
- 8 Illustration numérique et simulation

## Région de confiance simultanée

### LR

- Méthode: Le quotient de vraisemblance (LR)
- Sous certaines conditions de régularité (Miller 1981)

Le log-likelihood ratio (LLR)  $q = 2 \left\{ \ln L(x, \hat{\theta}) - \ln L(x, \theta) \right\}$

converge en distribution vers une loi  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté

•  $\chi^2_{1-\nu, 2} = -2 \ln \nu$  est le  $(1 - \nu)$ -quantile de la loi  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté

# Région de confiance simultanée

## LR

- Méthode: Le quotient de vraisemblance (LR)
- Sous certaines conditions de régularité (Miller 1981)

Le log-likelihood ratio (LLR)  $q = 2 \left\{ \ln L(x, \hat{\theta}) - \ln L(x, \theta) \right\}$

converge en distribution vers une loi  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté

- $\chi_{1-\nu, 2}^2 = -2 \ln \nu$  est le  $(1 - \nu)$ -quantile de la loi  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté

## Région de confiance simultanée

### LR

- Méthode: Le quotient de vraisemblance (LR)
- Sous certaines conditions de régularité (Miller 1981)

Le log-likelihood ratio (LLR)  $q = 2 \left\{ \ln L(x, \hat{\theta}) - \ln L(x, \theta) \right\}$

converge en distribution vers une loi  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté

- $\chi_{1-\nu, 2}^2 = -2 \ln \nu$  est le  $(1 - \nu)$ -quantile de la loi  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté

## Région de confiance simultanée

### LR

- Méthode: Le quotient de vraisemblance (LR)
- Sous certaines conditions de régularité (Miller 1981)

Le log-likelihood ratio (LLR)  $q = 2 \left\{ \ln L(x, \hat{\theta}) - \ln L(x, \theta) \right\}$

converge en distribution vers une loi  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté

- $\chi_{1-\nu, 2}^2 = -2 \ln \nu$  est le  $(1 - \nu)$ -quantile de la loi  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté

## Région de confiance simultanée

### LR

- Méthode: Le quotient de vraisemblance (LR)
- Sous certaines conditions de régularité (Miller 1981)

Le log-likelihood ratio (LLR)  $q = 2 \left\{ \ln L(x, \hat{\theta}) - \ln L(x, \theta) \right\}$

converge en distribution vers une loi  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté

- $\chi^2_{1-\nu, 2} = -2 \ln \nu$  est le  $(1 - \nu)$ -quantile de la loi  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté

## Région de confiance simultanée

- On étudie le cas de  $n$  modèles de réparation (Failure-Repair model) indépendants.
- On obtient alors la région de confiance simultanée suivante:

$$\begin{aligned}
 & (\hat{\beta} - \beta) \left\{ \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^{N_1^l(t)} \ln x_{l,2k-1} + \sum_{k=1}^{N_2^l(t)} \ln(x_{l,2k} + c x_{l,2k-1}) \right) \right\} \\
 & + \left( \sum_{l=1}^n N^l(t) \right) \left( \ln \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} - \hat{\beta} \ln \hat{\alpha} + \beta \ln \alpha - 1 \right) + \frac{1}{\alpha^\beta} G = -\ln \gamma.
 \end{aligned}$$

## Région de confiance simultanée

- On étudie le cas de  $n$  modèles de réparation (Failure-Repair model) indépendants.
- On obtient alors la région de confiance simultanée suivante:

$$\begin{aligned}
 & (\hat{\beta} - \beta) \left\{ \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^{N_1^l(t)} \ln x_{l,2k-1} + \sum_{k=1}^{N_2^l(t)} \ln(x_{l,2k} + c x_{l,2k-1}) \right) \right\} \\
 & + \left( \sum_{l=1}^n N^l(t) \right) \left( \ln \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} - \hat{\beta} \ln \hat{\alpha} + \beta \ln \alpha - 1 \right) + \frac{1}{\alpha^\beta} G = -\ln \gamma.
 \end{aligned}$$

## Région de confiance simultanée

- On étudie le cas de  $n$  modèles de réparation (Failure-Repair model) indépendants.
- On obtient alors la région de confiance simultanée suivante:

$$\begin{aligned}
 & (\hat{\beta} - \beta) \left\{ \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^{N_1^l(t)} \ln x_{l,2k-1} + \sum_{k=1}^{N_2^l(t)} \ln(x_{l,2k} + c x_{l,2k-1}) \right) \right\} \\
 & + \left( \sum_{l=1}^n N^l(t) \right) \left( \ln \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} - \hat{\beta} \ln \hat{\alpha} + \beta \ln \alpha - 1 \right) + \frac{1}{\alpha^\beta} G = -\ln \gamma.
 \end{aligned}$$

## Région de confiance simultanée

$$\begin{aligned}
 G = & \sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^{N_1^l(t)} (x_{l,2k-1})^\beta + \sum_{k=1}^{N_2^l(t)} \left\{ (x_{l,2k} + cx_{l,2k-1})^\beta - (cx_{l,2k-1})^\beta \right\} \right. \\
 & + \mathbf{1}\{K(t) = 1\} \left\{ (t - t_{l,N^l(t)} + cx_{l,N^l(t)})^\beta - (cx_{l,N^l(t)})^\beta \right\} \\
 & \left. + \mathbf{1}\{K(t) = 0\} (t - t_{l,N^l(t)})^\beta \right\}
 \end{aligned}$$

# Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Le Modèle général
- 3 Le modèle de fiabilité avec réparations alternées
- 4 Estimation des paramètres
- 5 Distribution des durées inter-défaillances
- 6 Estimation de l'information de Fisher
- 7 Région de confiance simultanée
- 8 Illustration numérique et simulation**

# Illustration numérique et simulation

## Exemple 1

- Estimation des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  pour  $c = 0.2$ .
- Soient  $n = 100$ ,  $t = 10$ .
- Soient  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ .

# Illustration numérique et simulation

## Résultats

- Les estimations des paramètres sont  $\hat{\alpha} = 1.0070$  et  $\hat{\beta} = 1.9031$ .
- L'estimation de l'information de Fisher est:

$$I(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} 56.4000 & -5.4587 \\ -5.4587 & 5.9843 \end{pmatrix}$$

- $Var(\hat{\alpha}) = 0.1394$  et  $Var(\hat{\beta}) = 0.4281$ .
- On obtient respectivement les 95% intervalles de confiance des paramètres  $\alpha, \beta$  suivants:  
[0.2754, 1.7386], [0.6207, 3.1855].

# Illustration numérique et simulation

## Résultats

- Les estimations des paramètres sont  $\hat{\alpha} = 1.0070$  et  $\hat{\beta} = 1.9031$ .
- L'estimation de l'information de Fisher est:

$$I(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} 56.4000 & -5.4587 \\ -5.4587 & 5.9843 \end{pmatrix}$$

- $Var(\hat{\alpha}) = 0.1394$  et  $Var(\hat{\beta}) = 0.4281$ .
- On obtient respectivement les 95% intervalles de confiance des paramètres  $\alpha, \beta$  suivants:  
[0.2754, 1.7386], [0.6207, 3.1855].

# Illustration numérique et simulation

## Résultats

- Les estimations des paramètres sont  $\hat{\alpha} = 1.0070$  et  $\hat{\beta} = 1.9031$ .
- L'estimation de l'information de Fisher est:

$$I(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} 56.4000 & -5.4587 \\ -5.4587 & 5.9843 \end{pmatrix}$$

- $Var(\hat{\alpha}) = 0.1394$  et  $Var(\hat{\beta}) = 0.4281$ .
- On obtient respectivement les 95% intervalles de confiance des paramètres  $\alpha, \beta$  suivants:  
[0.2754, 1.7386], [0.6207, 3.1855].

# Illustration numérique et simulation

## Résultats

- Les estimations des paramètres sont  $\hat{\alpha} = 1.0070$  et  $\hat{\beta} = 1.9031$ .
- L'estimation de l'information de Fisher est:

$$I(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} 56.4000 & -5.4587 \\ -5.4587 & 5.9843 \end{pmatrix}$$

- $Var(\hat{\alpha}) = 0.1394$  et  $Var(\hat{\beta}) = 0.4281$ .
- On obtient respectivement les 95% intervalles de confiance des paramètres  $\alpha, \beta$  suivants:  
[0.2754, 1.7386], [0.6207, 3.1855].

# Illustration numérique et simulation

## Résultats

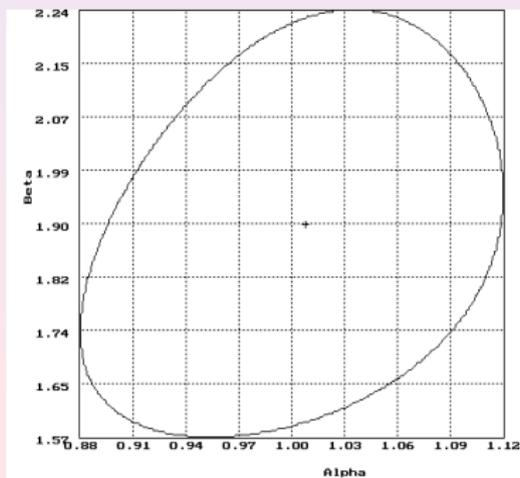
- L'erreur quadratique moyenne (MSE) de  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$ :

$s$	250	500	750	1000
$MSE(\hat{\alpha})$	0.000496	0.000483	0.000462	0.000454
$MSE(\hat{\beta})$	0.008100	0.008039	0.007462	0.007103

Table: MSE de  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$

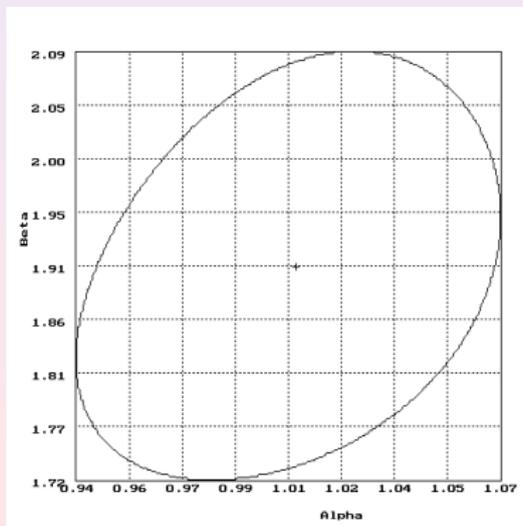
## Illustration numérique et simulation

- Région de confiance simultanée de  $\hat{\alpha}$  and  $\hat{\beta}$  pour  $n = 100$  et  $\gamma = 0.05$ .



## Illustration numérique et simulation

- Région de confiance simultanée de  $\hat{\alpha}$  and  $\hat{\beta}$  pour  $n = 300$  et  $\gamma = 0.05$ .



# Illustration numérique et simulation

## Exemple 2

- Estimation des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  pour  $c = 0.4$ .
- Soient  $n = 100$ ,  $t = 10$
- Soient  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1.2$ .

# Illustration numérique et simulation

## Résultats

- Les estimations des paramètres sont  $\hat{\alpha} = 1.0060$  et  $\hat{\beta} = 1.1937$ .
- L'estimation de l'information de Fisher est:

$$I(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} 19.3536 & -8.3425 \\ -8.3425 & 16.2061 \end{pmatrix}$$

- $Var(\hat{\alpha}) = 0.0664$  et  $Var(\hat{\beta}) = 0.0793$ .
- On obtient respectivement les 95% intervalles de confiance des paramètres  $\alpha, \beta$  suivants:  
[0.5012, 1.5108], [0.6418, 1.7456].

# Illustration numérique et simulation

## Résultats

- Les estimations des paramètres sont  $\hat{\alpha} = 1.0060$  et  $\hat{\beta} = 1.1937$ .
- L'estimation de l'information de Fisher est:

$$I(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} 19.3536 & -8.3425 \\ -8.3425 & 16.2061 \end{pmatrix}$$

- $Var(\hat{\alpha}) = 0.0664$  et  $Var(\hat{\beta}) = 0.0793$ .
- On obtient respectivement les 95% intervalles de confiance des paramètres  $\alpha, \beta$  suivants:  
[0.5012, 1.5108], [0.6418, 1.7456].

# Illustration numérique et simulation

## Résultats

- Les estimations des paramètres sont  $\hat{\alpha} = 1.0060$  et  $\hat{\beta} = 1.1937$ .
- L'estimation de l'information de Fisher est:

$$I(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} 19.3536 & -8.3425 \\ -8.3425 & 16.2061 \end{pmatrix}$$

- $Var(\hat{\alpha}) = 0.0664$  et  $Var(\hat{\beta}) = 0.0793$ .
- On obtient respectivement les 95% intervalles de confiance des paramètres  $\alpha, \beta$  suivants:  
[0.5012, 1.5108], [0.6418, 1.7456].

# Illustration numérique et simulation

## Résultats

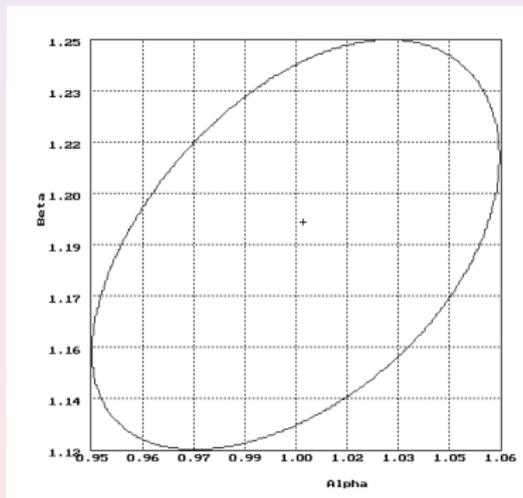
- Les estimations des paramètres sont  $\hat{\alpha} = 1.0060$  et  $\hat{\beta} = 1.1937$ .
- L'estimation de l'information de Fisher est:

$$I(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} 19.3536 & -8.3425 \\ -8.3425 & 16.2061 \end{pmatrix}$$

- $Var(\hat{\alpha}) = 0.0664$  et  $Var(\hat{\beta}) = 0.0793$ .
- On obtient respectivement les 95% intervalles de confiance des paramètres  $\alpha, \beta$  suivants:  
[0.5012, 1.5108], [0.6418, 1.7456].

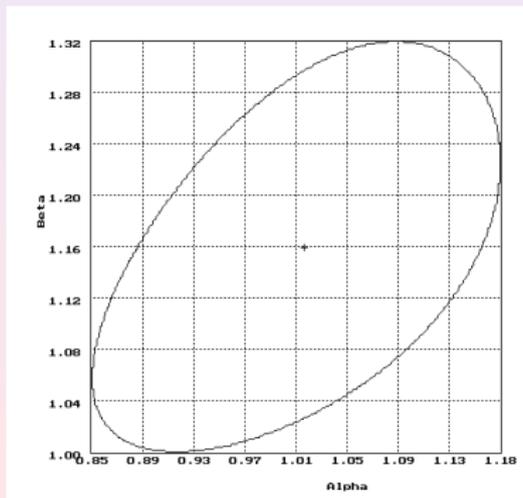
## Illustration numérique et simulation

- Région de confiance simultanée de  $\hat{\alpha}$  and  $\hat{\beta}$  pour  $n = 100$ ,  $c = 0.4$  et  $\gamma = 0.05$ .



## Illustration numérique et simulation

- Région de confiance simultanée de  $\hat{\alpha}$  and  $\hat{\beta}$  pour  $n = 100$ ,  $c = 0.7$  et  $\gamma = 0.05$ .



## Bibliographie

-  Bathe, F. and Franz, J. (1996), Modelling of repairable systems with various degrees of repair, *Metrika* **43**, 149–164.
-  Baxter, L., Kijima, M. and Tortorella, M. (1996), A point process model for the reliability of a maintained system subject to general repair, *Commun. Statist.–Stochastic Models* **12(1)**, 37–65.
-  Block, H.W., Langberg, N. and Savits, T.H. (1993), Repair replacement policies, *Journal of Applied Probability* **30**, 194–206.
-  Brémaud, P. (1981), Point Processes and Queues: Martingale Dynamics, *Springer, New York*.

## Bibliographie

-  Brown, M. and Proschan, F. (1983), Imperfect repair, *Journal of Applied Probability* **20**, 851–859.
-  Doyen, L. and Gaudoin, O. (2004), Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age, *Reliability Engineering & System safety* **84**, 45–56.
-  Gasmi, S. and Kahle, W. (1998), Parameter estimation in renewal processes with imperfect repair, *Advances in Stochastic Models for Reliability, Quality and Safety, Birkhauser Book Series, Statistics for Industry and Technology*, 53–65.
-  Kijima, M. (1989), Some results for repairable systems, *Journal of Applied Probability* **26**, 89–102.

## Bibliographie

-  Last, G. and Szekli, R. (1995), Stochastic comparison of repairable systems by coupling, *Bericht 95/11*.
-  Liptser, R.S. and Shiriyayev, A.N. (1978), Statistics of Random Processes, *vol II Springer New York - London*.
-  Miller, R.G. (1981), Survival Analysis , *John Willey and Sons, New York*.
-  Peers, H.W. (1971), Likelihood ratio and associated test criteria, *Biometrika* **58**, **3**, 577–587.
-  Sarhan, A. M. (2004), Parameter estimations in a general hazard rate model using masked data, *Applied Mathematics and Computation* **153**, 513–536.

Introduction

Le Modèle général

Le modèle de fiabilité avec réparations alternées

Estimation des paramètres

Distribution des durées inter-défaillances

Estimation de l'information de Fisher

Région de confiance simultanée

**Illustration numérique et simulation**

Joint work: Parameter estimation in an alternating repair model  
*Journal of Statistical Planning and Inference* 141 (2011) 3605-3616

**Merci pour votre attention**