Quelques résultats sur les systèmes r-consécutifs-k-sur-n

GHORAF NAMIR

FIMA Grenoble , 18 Mai 2006

Introduction

Depuis 1980 la modélisation "k-consécutifs-sur-n" a non seulement fait l'objet de nombreuses publications scientifiques mais également suscite l'intérêt de plusieurs chercheurs de divers pays. L'ampleur de la bibliographie et la diversité des problèmes traités font que les modèles "k-consécutifs-sur-n" sont devenus un domaine trés important dans la littérature de la théorie de la fiabilité. Dans cet exposé, je présenterai une généralisation de ces modèles. D'une façon précise, je présenterai les systèmes "r-consécutifs-k-sur-n" à travers quelques résultats.

Objectifs

Objectifs des travaux sur ces modèles
D'après les travaux scientifiques on trouve que les auteurs s'intéressent au:

1. Calcul de la fiabilité du système
2. Encadrement de la valeur de la fiabilité
3. Importance des composants dans le système
4. Comportement asymptotique du temps de panne du système.

......etc

Plan

Plan de l'exposé

On procède dans cet exposé de la manière suivante:

- Définitions et domaines d'applications
- Formules de la probabilité de panne du système
- Importance de structure des composants
- Cas markovien
- Conclusion

Notations

Notations

- n: nombre de composants dans le système
- r: nombre minimum de séries (de taille k) non-chevauchées dont leur panne cause la panne du système.
- k: nombre de composants dans une série.
- q_i: la probabilité de panne du i ^{éme}composant
- $p_i = 1 - q_i$: fiabilité du i ^{éme}composant
- $F_{k,r}(n, p)$: probabilité de panne du système où $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$
- $R_{k,r}(n, p) = 1 - F_{k,r}(n, p)$: fiabilité.
- $I_{k,r}^{n}(i, p)$: importance en fiabilité

Définition 1

Définition 1

Un système "k-consécutifs-sur-n" est un système formé de n composants disposés linéairement ou circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants consécutifs sont en panne. On remarque que

- $k = 1$on obtient un système en série
- $k = n$ on obtient un système en parallèle

Définition 2

Définition 2

Un système "r-consécutifs-k-sur-n" est un système composé de n composants disposés linéairement ou circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins r séries de k composants consécutifs tombe en panne. On remarque que

- $r = 1$on obtient un système "k-consécutifs-sur-n"
- $k = 1$ on obtient un système "r-parmi-n"

Remarque

Remarque

On trouve aussi dans la littérature les présentations suivantes:

- Le système G=good: le système fonctionne si et selement si au moins r séries de k composants consécutifs fonctionnent.
- Le système "k-consécutifs-sur-n" bidimensionnel
- Le système "k-consécutifs-sur-n" tridimensionnel

Domaines d’applications

Si on se réfère à la littérature mathétiques sur ces modèles on constate que les domaines d’applications sont plutôt diversifiés, et parmi ceux-ci nous citons ici les exemples suivants

Exemple1

Exemple1 (système de télécommunication)
Un système de télécommunication avec n stations de relais (des satellites ou des stations au sol) numérotées de 1 au n. On suppose qu'un signal émis de la station 1 peut être reçu par les stations 2,3,....,k+1 ensemble, et un signal émis de la station 2 peut être reçu par les stations 3, 4....,k+2 ensemble, etc. . . Alors quand le nombre de stations consécutives en panne est inférieur à k, le système de télécommunication peut toujours transmettre le signal de la station 1 à la station n. cependant, si k stations consécutives tombent en panne, le système tombe en panne. Alors on a ici un système "k-consécutifs-sur-n" (c à d $r = 1$)

Exemple2(Système de transport du Pétrole)
Pour transporter du Pétrole d'un point A vers un point B on dispose de n pompes. Ces pompes sont placées à égales distances entre A et B. Chaque pompe peut transporter le pétrole k pompes plus loin. Ce système tombe en panne si et seulement si au moins k pompes consécutives sont en panne. Alors on a ici aussi un système "k-consécutifs-sur-n" (c à d $r = 1$)

Autres exemples

On a aussi les exemples suivants:

- Système du contrôle de la qualité :c'est un système "r-consécutifs-k-sur-n".
- Système de diagnostique d'une maladie (par rayon X): c'est un système "k-consécutifs-sur-n" bidimensionnel et tridimensionnel.
- Système de surveillance: "k-consécutifs-sur-n" bidimensionnel

Formule récursives

Théorème 1 Papastavridis 1990: Pour $n \geq kr + 1$,on a

$$F_{k,r}(n, p) = F_{k,r}(n-1, p) + \sum_{s=1}^{r} p_{n-sk} \prod_{i=1}^{sk} q_{n-sk+i} \left(F_{k,r-s}(n-sk+1, p) - F_{k,r-s+1}(n-sk-1, p)\right)$$

Si les composants du système sont supposés identiques c à d $p_1 = p_2 = ... = p_n = p = 1 - q$ on obtient le corollaire suivant:

Formule récursives

Corollaire 1 Soit $n \geq kr + 1$ alors:

$$F_{k,r}(n,p) = F_{k,r}(n-1) + \sum_{s=1}^{r} pq^{sk}\left(F_{k,r-s}(n-sk+1) - F_{k,r-s+1}(n-sk-1)\right)$$

Remarque
D'aprés les formules précédentes on remarque que la probabilité de panne d'un système "r-consécutifs-k-sur-n" est donnée en fonction de celles des systèmes "r-consécutifs-k-sur-j" ou $j \leq n-1$. Et ce pose un grand problème dans le calcul de la fiabilité du système.

Formule explicite

Théorème 2: Papastavridis 1990: Soit $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$, et $n \geq kr$ alors

$$F_{k,r}(n,p) = \sum_{s=r}^{\left[\frac{n}{k}\right]} \sum_{i=sk}^{n} \binom{s+n-i}{s} N(i-sk, n-i+1)\, q^i p^{n-i}.$$

où $\left[\frac{n}{k}\right]$ est la partie entière de $\frac{n}{k}$ et

$$N(i,j) = \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} \binom{i+j-1-mk}{i-mk} (-1)^m .$$

Autre Formule

Autre formule récursive

Nous donnerons ici une autre formule récursive de la fiabilité du système en fonction de celles des sous système "$(r-h)$-consécutifs-k-sur-$(n-j)$".

Autre Formule

Théorème 3: Pour $n \geq rk$

$$R_{k,r}(n,p) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{j=(h-1)k+1}^{hk} p_j \left(\prod_{i=1}^{j-1} q_i \right) R_{k,r-h+1}(n-j, p_{j+1}, ..., p_n)$$

Si: $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$ on a:

$$R_{k,r}(n,p) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{j=(h-1)k+1}^{hk} pq^j R_{k,r-h+1}(n-j)$$

Probabilité de panne Via celle du système "k-consécutifs-sur-n"

Probabilité de panne du système Via celle du système "k-consécutifs-sur-n".
Nous avons pensé qu'il est intéressant d'établir une formule pour la probabilité de panne d'un système "r-consécutifs-k-sur-n" en fonction de celle d'un "k-consécutifs-sur-n" et ce pour qu'on puisse utiliser tous les résultats concernant ce dernier pour trouver ceux du premier. Alors nous avons les résultats suivants :

Probabilité de panne Via celle du système "k-consécutifs-sur-n"

Cas des composants non identiques

Théorème 3: (2002) pour $n \geq rk$ et $r \geq 1$ on a

$$F_{k,r}(n,p) = \sum_{i=1}^{n-rk+1} R_k(i-2, p_1, .., p_{i-2})\, p_{i-1} \prod_{j=i}^{i+k-1} q_j F_{k,r-1}(n-k-i+1, p_{i+k}, .., p_n$$

Remarque

D'aprés ce théorème on remarque que (on peut appliquer notre formule à $F_{k,r-1}$ainsi de suite) la probabilité de panne d'un système "r-consécutifs-k-sur-n" est donnée directement en fonction de celle d'un système "k-consécutifs-sur-n".

Probabilité de panne Via celle du système "k-consécutifs-sur-n"

Le corollaire suivant montre que dans le cas $r = 2$ la probabilité de panne du système "2-consécutifs-k-sur-n" est directement donnée en fonction de celle d'un système """k-consécutifs-sur-n".

Corollaire 2: pour $n \geq 2k$ on a:

$$F_{k,2}(n,p) = \sum_{i=1}^{n-2k+1} R_k(i-2, p_1, .., p_{i-2})\, p_{i-1} \prod_{j=i}^{i+k-1} q_j F_k(n-k-i+1, p_{i+k}, .., p_n)$$

Probabilité de panne Via celle du système "k-consécutifs-sur-n"

Comparaison des résultats

Si $r = 2$ alors on a d'aprés le théorème 1.

$$F_{k,2}(n,p) = F_{k,2}(n-1,p) + \sum_{s=1}^{2} p_{n-sk} \prod_{i=1}^{sk} q_{n-sk+i} \left(F_{k,2-s}(n-sk+1,p) - F_{k,2-s+1}(n-sk-1,p)\right)$$

donc le terme $F_{k,2}$ intervient toujours dans la formule et ce n'est pas le cas dans notre formule (corollaire 2). Pour cette raison on peut dire que notre formule est plus rapide dans le calcul de la probabilité de panne du système.

Probabilité de panne Via celle du système "k-consécutifs-sur-n"

Cas des composants identiques
Si $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$. Alors dans ce cas nous avons les résultats suivants:
Corollaire 3: Pour $n \geq rk$

$$F_{k,r}(n) = q^k F_{k,r-1}(n-k) + pq^k \sum_{i=2}^{n-rk+1} R_k(i-2) F_{k,r-1}(n-k-i+1)$$

Probabilité de panne Via celle du système "k-consécutifs-sur-n"

Théorème 4: Pour $n \geq rk$ et $r \geq 1$ on a

$$F_{k,r}(n) = q^{(r-1)k}[F_k(n-(r-1)k) + \sum_{j=1}^{r-1} \binom{r-1}{j} p^j \sum_{i_1,i_2,..,i_j} \prod_{l=1}^{j} R_k(i_l - 2) F_k(n-(r-1)k - \alpha_j + j)]$$

Où $\alpha_0 = 0$, $\alpha_j = \sum_{l=1}^{j} i_l$, et i_s prend les valeurs de 2 à $n - rk - \alpha_{s-1} + s$,pour $s = 1, 2, \quad , r-1$.

Importance de structure

Le but de la présente section est de donner les formules de l'importance de structure du $i^{ème}$ composant $(i = 1, 2, ..., n)$, et pour cela nous avons d'abord les définitions suivantes:

Définition 3: L'importance en fiabilité (ou importance au sens de Birnbaum) du $i^{ème}$ composant $(i = 1, 2, ..., n)$ est donnée par la formule:

$$I_{k,r}^{n}\left(i, p\right) = \frac{\partial R_{k,r}\left(n, p\right)}{\partial p_i}$$

Définition 4: Dans le cas où tous les composants sont identiques avec $p_i = p = \frac{1}{2}$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ l'importance au sens de Birnbaum du $i^{ème}$ composant est dite dans ce cas importance de structure du composant i notée $I_{k,r}^{n}(i)$

Remarque

L'importance en fiabilité d'un composant mesure l'amélioration de la fiabilité du système par l'amélioration de la fiabilité de ce composant . L'importance en fiabilité fournit donc une mesure quantitative d'importance des composants de sorte que les concepteurs du système puissent décider quels sont les composants qui méritent une attention supplémentaire.

Importance de structure

Lemme1: Pour $i = 1, 2, ..., n$:

$$I_{k,r}^{n}(i) = 2\left[F_{k,r}(n) - F_{k,r}(n, 1_i)\right]$$

ou $F_{k,r}(n, 1_i)$ est la probabilité que le système tombe en panne sachant que le composant i fonctionne.
et on a aussi

$$I_{k,r}^{n}(i) = I_{k,r}^{n}(n - i + 1)$$

Ce lemme veut dire que les importances de structures des composants sont symétriques par rapport au composant du milieu du système donc on peut seulement calculer les valeurs de$I_{k,r}^{n}(i)$ pour $i \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Importance de structure

Théorème 5 Pour $i \geq 0$.

$$I_{k,r}^{n}(i) = 2\left[F_{k,r}(n) - \sum_{l=0}^{\left[\frac{i-1}{k}\right]} \left[F_{k,l}(i-1) - F_{k,l+1}(i-1)\right] F_{k,r-l}(n-i)\right]$$

Corollaire4: Pour $1 \leq i \leq k$,:

$$I_{k,r}^{n}(i) = 2\left[F_{k,r}(n) - F_{k,r}(n-i)\right]$$

Pour $i \geq rk+1$,:$I_{k,r}^{n}(i) =$

$$2\left[F_{k,r}(n) - F_{k,r}(i-1) - \sum_{l=0}^{r-1} \left[F_{k,l}(i-1) - F_{k,l+1}(i-1)\right] F_{k,r-l}(n-i)\right]$$

Importance de structure

Dans le corollaire suivant on donne l'importance de structure des composants dans un système "k-consecutifs–sur-n" :

Corollaire5: pour $r = 1$ on a:

$$I_k^n(i) = 2\left[R_k(i-1)\,R_k(n-i) - R_k(n)\right]$$

l'importance de structure via la suite de Fibonacci cas ou r=2

Ici, on considère un système "2-consecutifs-k-sur-n" $(n \geq 2k+1)$ (c à d $r = 2$). La suite de Fibonacci d'ordre k est la suite dont le terme général $f_{k,n}$, défini par:

$$f_{k,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq n \leq k-1 \\ 1 & \text{si } n = k \\ \sum_{j=n-k}^{n-1} f_{k,j} & \text{si } n \geq k+1 \end{cases}$$

Importance de structure

En 1999 Kuo et al ont montré que la fiabilité d'un système "k-consécutifs-sur-n" avec $p_i = p = \frac{1}{2}$ pour $i = 1, 2, ..., n$ est donnée par:

$$R_k(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n f_{k,n+k+1}$$

et:

$$f_{k,n} == \begin{cases} 2^{n-k-1} & \text{if } k+1 \leq n \leq 2k \\ 2^{n-k-1} - (n-2k+1)\, 2^{n-2k-2} & \text{if } 2k+1 \leq n \leq 3k+1 \\ 2f_{k,n-1} - f_{k,n-k-1} & \text{if } n \geq k+2 \end{cases}$$

Importance de structure

En utilisant la suite de Fibonacci on a (Kuo et al 1999) l'importance du i^{ieme} composant dans un système "k-consecutifssur-n" est:

$$I_k^n(i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(2 f_{k,i+k} f_{k,n-i+k+1} - f_{k,n+k+1}\right)$$

On définit la suite de terme général $g_{k,n}$ donné par

$$g_{k,n} = \begin{cases} 0, & \text{for } n \leq k \\ 2^n - \sum\limits_{i=1}^{n-k} \left(2^{n-i} + f_{k,n+k-i+1}\right) f_{k,k+i-1}, & \text{for } n \geq k+1 \end{cases}$$

Alors on a :

Importance de structure

Théorème6: pour tout n, et k :

$$F_{k,2}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n g_{k,n-k+1}$$

Alors on peut dire que le terme $g_{k,n-k+1}$ est égale au nombre de fois que le système tombe en panne.

Importance de structure

Maintenant on peut montrer que 'importance de structure est donnée seulement en fonction de $f_{k,n}$ et $g_{k,n}$.

Théorème7: Pour $i \geq 1$:Pour $i \geq 1$:

$$\begin{aligned} 2^{n-1} I_{k,2}^{n}(i) = {} & g_{k,n-k+1} - 2f_{k,i+k} g_{k,n-i-k+1} \\ & -2f_{k,n-i+k+1}\left[2^{i-1} - f_{k,i+k} + g_{k,i-k}\right] \end{aligned}$$

Corollaire6: Pour $1 \leq i \leq k$

$$2^{n-1} I_{k,2}^{n}(i) = g_{k,n-k+1} - 2^{i} g_{k,n-i-k+1}$$

Pour :$k+1 \leq i \leq 2k$

$$2^{n-1} I_{k,2}^{n}(i) = g_{k,n-k+1} - 2f_{k,i+k} g_{k,n-i-k+1} - 2f_{k,n-i+k+1}\left[2^{i-1} - f_{k,i+k}\right]$$

Remarque

On peut établir aussi des formules pour $I^n_{k,2}(i)$ en fonction de $I^n_k(i)$ comme le montre le cas où $i = 1$:

$$2^n I^n_{k,2}(1) = 2^{n-2k-2} \sum_{j=1}^{n-2k-1} I_k^{n-2k-1}(j) + \left(n - 2k - 2^{k+2} + 3\right) f_{k,n-k}$$

Cas Markovien

Dans cette section on considère le cas où les composants du système possèdent une dépendance Markovienne c'est à dire l'état de chaque composant dépend de l'état du composant qu'il précède. Autrement dit les états des composants forment une chaine de Markov à deux états, et dans ce cas nous donnons aussi une formule récursive pour la probabilité de panne du système.

Nous avons besoin des notations suivantes

$p_{i,0} = \Pr\left[X_i = 1/X_{i-1} = 0\right],\ i = 2, 3, ..., n;$

$q_{i,0} = 1 - p_{i,0}$

$p_{i,1} = \Pr\left[X_i = 1/X_{i-1} = 1\right],\ i = 2, 3, ..., n;$

$q_{i,1} = 1 - p_{i,1}$

$p_1 : \Pr\left(X_1 = 1\right)$

$q_1 = 1 - p_1,\ p_{1,0} = p_{1,1} = p_1,\ q_{1,0} = q_{1,1} = q_1$

Cas Markovien

Sous les considérations ci-déssus la probabilité de panne du système est donnée par le théorème suivant:

Théorème 8: Pour $n \geq rk$ on a:

$$F(n,r) = F(n-1,r) + \sum_{s=1}^{r} q_{n-sk+1,1} \prod_{j=2}^{sk} q_{n-sk+j,0} \sum_{l=0}^{n-rk} p_{n-sk-l,0} \prod_{i=0}^{l-1} \left(p_{n-sk-i,1} - p_{n-sk-i,0}\right) \left[F(n-sk-l-1, r-s) - F(n-sk-l-1, r-s+1)\right]$$

Ce théorème généralise celui de Papastavridis 1990 (théorème1) donné dans le cas où les composants sont indépendants.

Cette section examine le système "r-consécutifs-k-sur-n de période k". Ce système a été présenté pour la première fois en 1999 par J. Boland et al dans un article où ils ont donné une formule de sa probabilité de panne dans le cas des composants indépendants. Alors ici nous allons présenter nos résultat concernant la probabilité de panne du système dans le cas ou les composants du système sont indépendants ensuite dans le cas Markovien. Alors nous avons d'abord la définition suivante.

Définition5: On appelle un système "r-consécutifs-k-sur-n de période k" tout système "r-consécutifs-k-sur-n" possède la propriéte suivante:

$$q_j = q_i, \text{ pour tout } j = mk + i, (1 \leq i \leq k), m \geq 0$$

La définition précédente veut dire que dans un système "r-consécutifs-k-sur-n de période k" les probabilités de panne des composants sont périodiques (la période est k) et dans ce cas on a seulement k probabilités de panne (où k types de composants) (q_i ,$i = 1, 2, ..., k$).

Cas où les composants sont indépendants
Théorème 9 (2003): Pour $r \geq 2$ et $rk \leq n$

$$F_{k,r}\left(p_1,...,p_n\right) = Q^{r-1}F_k\left(p_{(r-1)k+1},...,p_n\right) + Q^{r-1}\sum_{j=1}^{r-1}\binom{r-1}{j}\sum_{i_1,i_2,...,i_j}F_k\left(p_{(r-1)k+\alpha_j-j+1},...,p_n\right)\times \prod_{l=1}^{j}R_k\left(p_{\alpha_{l-1}-l+2},...,p_{\alpha_l-l-1}\right)p_{\alpha_l-l}$$

où $Q=\prod_{j=1}^{k}q_j$, $\alpha_0=0$, $\alpha_j=\sum_{l=1}^{j}i_l$ et i_s prend ses valeurs de 2 à $n-rk-\alpha_{s-1}+s$ pour $s=1,2,...,r-1$.

Comparaison des résultats
En utilisant: $\forall\ k \leq n$, $\exists m \geq 0$, tel que $n = mk + i$, $(1 \leq i < k)$, Boland et al ont montré que:

$$F(mk+i,r) = F(mk,r) + \sum_{j>0} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_j \\ s_1+\ldots+s_j \leq m}} (-1)^t \binom{j}{t} \sigma_j(i) \times$$
$$Q^{s_1+\ldots+s_j} F((m - s_1 - \ldots - s_j)k, r - s_1 - \ldots - s_j + t)$$

où: $\sigma_j(i)$ est le polynôme symétrique de degrée j dans $p_1, \ldots, p_{\hat{\imath}}$.
On peut dire que notre formule est plus rapide dans les calculs. A titre d'exemple on a:

Soit $n = 3k$ et $r = 2$, d'aprés notre théorème

$$F_{k,2}\left(p_1, p_2, ..., p_{3k}\right) = Q \sum_{i=1}^{k+1} F_k\left(p_{k+i}, ..., p_{3k}\right) p_{i-1}$$

où $F_k\left(p_{k+i}, ..., p_{3k}\right)$ est la probabilité de panne d'un système "k-consécutifs-sur-$(2k - i + 1)$" qu'on peut la calculer facilement.

Et d'aprés la formule de Boland et al on a

$$F_{k,2}(p_1, p_2, ..., p_{3k}) = F_{k,2}(p_1, p_2, ..., p_{3k-1}) \\ - p_{2k} Q.F_k(p_1, p_2, ..., p_{2k-1})$$

et on remarque que le tèrme $F_{k,2}(p_1, p_2, ..., p_{3k-1})$ qui est la probabilité de panne du système "2-consécutifs-k-out-of-(3k-1) de période k" est toujours présent dans la formule et pour l'éliminer il faut appliquer la même formule k fois.

Donc on peut dire que notre formule est plus rapide dans le calcul que celle de Boland et al car notre thérème, lui, donne directement la probabilité de panne du système en question en fonction de celle d'un système "k-consécutifs-sur-n" par contre celle de Boland et al donne la même chose mais aprés plusieurs étapes. Et nous avons l'exemple numérique suivant:

Exemple
On considère un système "3-consécutifs-3-sur-11 de période 3" alors:
En utilisant notre théorème ci-dessus on a:

$$F_{3,3}\left(p_1,...,p_{11}\right) = Q^2\left[F_3\left(p_7,...,p_{11}\right) + 2F_3\left(p_8,...,p_{11}\right)p_1\right] \\ + Q^2F_3\left(p_9,...,p_{11}\right)p_2\left[2+p_1\right]$$

Donc on obtient directement

$$F_{3,3}\left(p_1,...,p_{11}\right) = Q^3\left[1+3p_1+3p_2+3p_1p_2\right]$$

Et en utilisant la formule de Boland et al on obtient

$$F(11,3) = F(9,3) + p_2 QF(7,2) + p_1 QF(6,2) + p_2 Q^2 F(4,1) \\ + p_1 Q^2 F(3,1) + p_1 Q^3 + p_2 Q^3$$

Mais pour calculer $F(7,2)$ il faut appliquer la même formule une deuxième fois:

$$F(7,2) = F(6,2) + p_1 QF(3,1) + p_1 Q^2$$

et on obtient :

$$F_{3,3}(p_1, ..., p_{11}) = F(11,3) = Q^3 [1 + 3p_1 + 3p_2 + 3p_1 p_2]$$

Système de période k cas markovien

Considérons un système "r-consecutifs-k-sur-n" ou les états des composants forment une chaine de Markov à deux états. Nous supposons de plus que les probabilités de tansition sont périodiques (la période est k), c'est à dire $q_{i,1} = q_{j,1}$ et $q_{i,0} = q_{j,0}$ pour $j = mk + i$, $(i = 1, 2..., k)$, $m \geq 0$ et on appelle un tel système "r-consécutifs-k-sur-n de période k" avec dépendance Markovienne. Nous donnerons aussi la formule de la probabilité de panne de ce genre de systèmes.

Posons d'abord:

$$Q = \prod_{j=1}^{k} q_{j,0}$$

$\alpha_i = \frac{q_{i+1,1}}{q_{i+1,0}}$ pour $i = 0, 1, ..., k-1$

$\beta_i = p_{i,1} - p_{i,0}$ pour $i = 1, 2, ..., n$

$\sigma_j^{(1,2,\ldots,i)}(i)$ (pour $0 < j \leq i \leq k$) est le polynôme de degré j dans $\alpha_1 p_{1,0}, \alpha_2 p_{2,0}, \ldots., \alpha_i p_{i,0}$

$$\Phi_{l_v,h_v} = \alpha_{l_v} p_{h_v,0} \prod_{z_v=h_v+1}^{l_v} \beta_{z_v}, \text{ pour } v \geq 1$$

$$S(Q,k,r,m,j,t) = \sum_{\substack{s_1,..,s_j \\ s_1+..+s_j \leq m}} Q^{s_1+\ldots+s_j} F\left((m - s_1 - .. - s_j)\, k, r - s_1 - .. - s_j + t\right)$$

$$L_i(x) = \sum_{l_x,l_{x-1},\ldots,l_1} \sum_{h_x,h_{x-1},\ldots,h_1} \prod_{v=1}^{x} \Phi_{l_v,h_v} \text{pour } x \geq 1$$

$$\psi_{j,x}(i) = \sigma_{j-x}^{(1,2,\ldots,h_x-1,l_x+1,\ldots,h_{x-1}-1,l_{x-1}+1,\ldots\ldots,h_1-1,l_1+1,\ldots,i)}\left(i - \sum_{y=1}^{x}(l_y - h_y) - x\right),$$

pour $x \geq 0, j \geq 1$

Théorème10 pour $i \geq 1$ on a:

$$\begin{aligned} F(mk+i,r) &= F(mk,r) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i}\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^{t}\sigma_{j}^{(1,2,\ldots,i)}(i)\,S(Q,k,r,m,j,t) \\ &\quad + \sum_{x=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]} L_i(x)\sum_{j=x}^{i}\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^{t}\psi_{j,x}(i)\,S(Q,k,r,m,j,t) \end{aligned}$$

Il est clair que dans le cas ou les composants sont indépendants on obtient facilement le résultat de Boland et al (1999).

Conclusion

Nous avons présenté ici quelques résultats importants sur les modèles "r-consécutifs-k-sur-n" concernant le calcul de la fiabilté du système et l'importance des composants. Et nous signalons que beaucoup de problèmes restent ouverts comme:

- Le système "r-consécutifs-k-sur-n" bidimensionnel et tridimentionnel.
- Le système "r-consécutifs-k-sur-n" réparable
- Le cas des composants dépendants

  .....

Bibliographie

Papastavridis, S.G., "m-consecutive-k-out-of-n: F systems", IEEE Trans. Reliab. vol 39, N 3, Aug. 1990. pp 386-388.

Boland, P.J ,Papastavridis, S.G., "r-Consecutive k out of n :F systems with cycle k" Statistics & Probability Letters 44 (1999) 155-160.

Fen-Hui Lin, Way Kuo, Frank Hwang, "Structure importance of consecutive-k-out-of-n systems", Operations Research Letters. 25 (1999) pp 101-107.

Ghoraf, N., Boushaba, M., "Fast Formula of a Reliability of m-Consecutive-k-out-of-n: F System with cycle k", Sociedad de Estadistica e Investigacion Operativa , Top (2003) Vol. 11, No. 2, pp. 275-283.

Boushaba, M.Ghoraf, N., "m-consecutive-k-out-of-n: F system Via consecutive-k-out-of-n: F system", 8th ISSAT

International Conference on reliability and quality in design, Anaheim California USA 2002, (07. 09 Aug 2002) pp 171-174.

Boushaba,M , Ghoraf, N, "A tridimentional consecutive-k-out-of-n: F system" Int. Jour. Reliab. Qual. Safe. Eng , (2002), vol 9, N° 2, pp 193-198.