Utilisation des processus de renouvellement pour l'étude asymptotique d'un modèle de dégradation avec maintenance

Céline Labart, Université de Savoie
En collaboration avec Philippe Briand (UdS), Edwige Idée (UdS), Emmanuel Rémy (EDF)

11 avril 2013

Plan

Les données

Les données consistent en des informations concernant

- les dates des contrôles préventifs et l'état de dégradation du système découvert lors de ces contrôles
- les dates de défaillance

Individu	date du constat	Etat du système
1	01/01/1995	Contrôle : RAS
1	01/06/1995	Contrôle : RAS
1	01/11/1995	Contrôle : Usure non significative
1	01/01/1996	Contrôle : Remplacement
2	01/01/1995	Contrôle : RAS
2	15/04/1995	Fuite : Remplacement

Les données

Lors des contrôles préventifs (appelés *visites*), le système peut se trouver dans 3 états

- état *sain* noté **S**
- état *dégradé léger* noté **DL**
- état *dégradé significatif* noté **DS**

Les données

Lors des visites

- Si le système est constaté dans l'état sain (**S**) ou dégradé léger (**DL**), il n'y a pas d'action de remplacement
- Si le système est constaté dans l'état dégradé significatif (**DS**), la pièce est remplacée, le système est remis à neuf, il revient dans l'état sain (**S**)

En dehors des visites, il peut survenir des *défaillances*. Lorsque le système tombe dans l'état *défaillant* (**D**), il est aussitôt remis à neuf, il revient donc dans l'état sain (**S**).

Modélisation

Nous modélisons les temps de passage d'un état à l'autre de la manière suivante

- Etat sain (**S**) $\rightarrow$ Etat dégradé léger (**DL**) : Y^l
- Etat dégradé léger (**DL**) $\rightarrow$ Etat dégradé significatif (**DS**) : Y^s
- Etat dégradé significatif (**DS**) $\rightarrow$ Défaillance (**D**) : Y^d

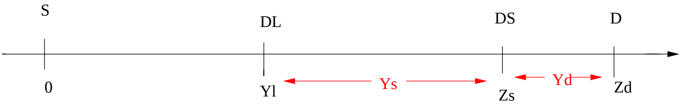


FIGURE: Notations

On suppose que Y^l, Y^s et Y^d sont des v.a. deux à deux indépendantes. On pose $Z^s = Y^l + Y^s$ et $Z^d = Y^l + Y^s + Y^d$.

Modélisation

Nous notons **c** la périodicité des visites.

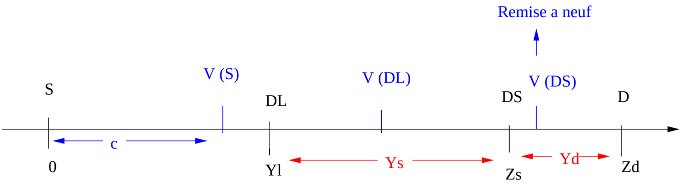


FIGURE: Constation d'une DS

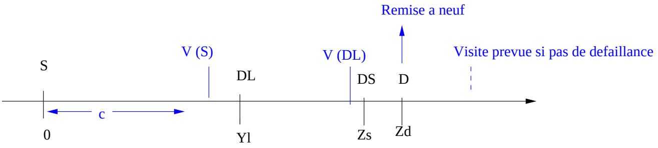


FIGURE: Pas de constatation de DS

Remise à neuf

La date de la visite qui suit une DS est donnée par

$$V^s = c \lceil Z^s / c \rceil ,$$

où $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière supérieure de x.
L'instant de la première remise à neuf est donc donné par

$$X^r = \min \left(V^s, Z^d \right) ,$$

i.e. le premier instant où

- soit une DS est constatée ($X^r = V^s$)
- soit une défaillance arrive avant la visite suivant la DS ($X^r = Z^d$).

Dates et Nombre de Remise à neuf

La k^{ieme} date de remise à neuf s'écrit

$$T_k^r = X_1^r + \ldots + X_k^r,$$

avec la convention $T_0^r = 0$, où les $(X_i^r)_{i\geq 1}$ sont des v.a. i.i.d de loi $\min\left(V^s, Z^d\right)$.
A l'instant t, le nombre de remises à neuf est donné par :

$$N_t^r = \sum_{k\geq 1} \mathbf{1}_{T_k^r \leq t} = \sup\{k \geq 1 : T_k^r \leq t\}, \qquad \sup \emptyset = 0.$$

Rappel sur les processus de renouvellement

Soit N le processus défini pour tout $t \geq 0$,

$$N_t = \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}_{T_k \leq t} = \sup\{k \geq 1 : T_k \leq t\}, \qquad \sup \emptyset = 0,$$

où $T_k = X_1 + \ldots + X_k$, les variables aléatoires $(X_k)_{k \geq 1}$ étant positives i.i.d. de fonction de répartition F, telle que $F(0) < 1$.
La loi des grands nombres pour les processus de renouvellement donne

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$$

presque sûrement (on a aussi convergence dans $\mathbb{L}^1$).
Si $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ sont finies, le TCL pour les processus de renouvellement donne

$$\lim_{t \to \infty} \sqrt{\frac{t(\mathbb{E}(X))^3}{\mathbb{V}(X)}} \left(\frac{N_t}{t} - \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \right) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Introduction

Données et Modélisation

Processus de Renouvellement

Comportement Asymptotique

de certains processus de notre problème de maintenance

de l'état du système

Cas particulier de la loi Exponentielle

Estimation des paramètres

Choix de la périodicité des visites

Comportement asymptotique du nombre de remises à neuf

La loi des grands nombres pour les processus de renouvellement donne

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t^r}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[X^r]}$$

presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$.
Le théorème de la limite centrale nous donne l'intervalle de confiance à 95% pour $\frac{N_t^r}{t}$

$$\left[\frac{1}{\mathbb{E}(X^r)} - 1.96 * \sqrt{\frac{\mathbb{V}(X^r)}{t(\mathbb{E}(X^r))^3}}, \frac{1}{\mathbb{E}(X^r)} + 1.96 * \sqrt{\frac{\mathbb{V}(X^r)}{t(\mathbb{E}(X^r))^3}}\right].$$

Comportement asymptotique du nombre de défaillances

Le processus $(N_t^d)_{t\geq 0}$ du nombre de défaillances est aussi un processus de renouvellement. Le temps entre deux défaillances est

$$X^d = \sum_{i=1}^{\tau} X_i^r, \qquad \text{avec } \tau = \inf\left\{i \geq 1 : V_i^s > Z_i^d\right\} \quad \inf \emptyset = +\infty.$$

On a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t^d}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[X^d\right]}, \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{N_t^d}{N_t^r} = \frac{\mathbb{E}\left[X^r\right]}{\mathbb{E}\left[X^d\right]},$$

presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$. De plus

$$\mathbb{E}\left[X^d\right] = \frac{\mathbb{E}\left[X^r\right]}{\mathbb{P}\left(V^s > Z^d\right)}, \text{ donc } \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{N_t^d}{N_t^r} = \mathbb{P}\left(V^s > Z^d\right).$$

En effet, τ est un temps d'arrêt donc $\mathbb{E}\left[X^d\right] = \mathbb{E}[\tau]\mathbb{E}[X^r]$ et τ est de loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}\left(V^s > Z^d\right)$.

Comportement asymptotique du nombre de dégradations significatives

Le processus $(N_t^s)_{t\geq 0}$ du nombre de dégradations significatives est aussi un processus de renouvellement. Le temps entre deux visites révélant un état (**DS**) est

$$X^s = \sum_{i=1}^{\sigma} X_i^r, \quad \text{avec } \sigma = \inf\left\{i \geq 1 : V_i^s \leq Z_i^d\right\} \quad \inf\emptyset = +\infty.$$

On a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t^s}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[X^s]}, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{N_t^s}{N_t^r} = \frac{\mathbb{E}[X^r]}{\mathbb{E}[X^s]},$$

presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$.

$$\mathbb{E}[X^s] = \frac{\mathbb{E}[X^r]}{1-\mathbb{P}(V^s > Z^d)}, \text{ d'où } \lim_{t\to+\infty} \frac{N_t^s}{N_t^r} = 1 - \mathbb{P}\left(V^s > Z^d\right).$$

Temps passé dans l'état (**DS**)

Soit θ_t^s le temps passé dans l'état (**DS**) jusqu'à l'instant t. Dans l'intervalle $\left]T_{k-1}^r, T_k^r\right]$, le temps passé dans l'état dégradé significatif est $X_k^r - Z_k^s$. Par conséquent,

$$\theta_t^s = \sum_{k=1}^{N_t^r} (X_k^r - Z_k^s) + \underbrace{\left(t - T_{N_t^r}^r - Z_{N_t^r+1}^s\right)_+}_{\text{tps passé dans l'état } \textbf{DS} \text{ depuis la dernière RN}} .$$

En encadrant θ_t^s, on trouve :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\theta_t^s}{t} = \frac{\mathbb{E}[X^r - Z^s]}{\mathbb{E}[X^r]}$$

presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$.

Temps passé dans l'état (**DS**) : Preuve de la convergence presque sûre

$$\sum_{k=1}^{N_t^r} (X_k^r - Z_k^s) \leq \theta_t^s \leq \sum_{k=1}^{N_t^r+1} (X_k^r - Z_k^s)\,,$$

Temps passé dans l'état (**DS**) : Preuve de la convergence presque sûre

d'où l'on déduit immédiatement que

$$\frac{1}{N_t^r}\sum_{k=1}^{N_t^r}(X_k^r - Z_k^s) \leq \frac{\theta_t^s}{N_t^r} \leq \frac{N_t^r+1}{N_t^r}\,\frac{1}{N_t^r+1}\sum_{k=1}^{N_t^r+1}(X_k^r - Z_k^s)\,.$$

et la loi forte des grands nombres implique que $\lim_{t\to+\infty}\frac{\theta_t^s}{N_t^r} = \mathbb{E}\left[X^r - Z^s\right]$ avec probabilité 1. Comme $\frac{\theta_t^s}{t} = \frac{N_t^r}{t}\frac{\theta_t^s}{N_t^r}$ on obtient la convergence p.s.

Temps passé dans l'état (**DS**) : Preuve de la convergence dans L^1

$$\sum_{k=1}^{N_t^r} (X_k^r - Z_k^s) \leq \theta_t^s \leq \sum_{k=1}^{N_t^r+1} (X_k^r - Z_k^s)\,,$$

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{N_t^r} (X_k^r - Z_k^s)\Big] \leq \mathbb{E}[\theta_t^s] \leq \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{N_t^r+1} (X_k^r - Z_k^s)\Big],$$

Temps passé dans l'état (**DS**) : Preuve de la convergence dans L^1

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N_t^r}(X_k^r - Z_k^s)\right] \leq \mathbb{E}[\theta_t^s] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N_t^r+1}(X_k^r - Z_k^s)\right],$$

Puisque $N_t^r + 1$ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N_t^r+1}(X_k^r - Z_k^s)\right] = \mathbb{E}\left[N_t^r + 1\right]\mathbb{E}\left[X^r - Z^s\right].$$

La convergence dans L^1 de N_t^r/t implique

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\theta_t^s\right]}{t} \leq \frac{\mathbb{E}\left[X^r - Z^s\right]}{\mathbb{E}\left[X^r\right]}.$$

Temps passé dans l'état (**DS**) : Preuve de la convergence dans L^1

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N_t^r}(X_k^r - Z_k^s)\right] \leq \mathbb{E}[\theta_t^s] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N_t^r+1}(X_k^r - Z_k^s)\right],$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N_t^r}(X_k^r - Z_k^s)\right] = \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}\left[(X_k^r - Z_k^s)\,\mathbf{1}_{T_k^r \leq t}\right] = \mathbb{E}\left[(X_1^r - Z_1^s)\,N_t^r\right].$$

Le lemme de Fatou donne $\liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left[(X_1^r - Z_1^s)\,N_t^r\right] \geq \frac{\mathbb{E}[X^r - Z^s]}{\mathbb{E}[X^r]}$, et donc

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\theta_t^s\right]}{t} \geq \frac{\mathbb{E}\left[X^r - Z^s\right]}{\mathbb{E}\left[X^r\right]}$$

Comportement asymptotique du nombre de visites N_t^v

Le nombre de visites effectuées dans l'intervalle $]T_{k-1}^r, T_k^r]$ est $K_k^r = V_k^s/c = \lceil Z_k^s/c \rceil$. Par conséquent, le nombre de visites avant t est

$$N_t^v = \sum_{i=1}^{N_t^r} K_i^r + \underbrace{\left\lfloor \left(t - T_{N_t^r}^r\right)/c \right\rfloor}_{\text{nb de visites depuis la dernière RN}} .$$

En encadrant N_t^v par $\mathbb{E}[N_t^r K^r] \leq \mathbb{E}[N_t^v] \leq (\mathbb{E}[N_t^r] + 1) \times \mathbb{E}[K^r]$, on montre que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t^v}{t} = \frac{\mathbb{E}\left[V^s\right]}{c\,\mathbb{E}\left[X^r\right]},$$

presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$.

Remarque : N^v n'est pas un processus de renouvellement.

Comportement asymptotique du nombre de visites dans l'état sain N_t^n

Dans l'intervalle $\left]T_{k-1}^r, T_k^r\right]$, on dénombre $\left\lfloor Y_k^l/c \right\rfloor$ visites révélant l'état sain. Par conséquent,

$$N_t^n = \sum_{k=1}^{N_t^r} \left(\left\lfloor Y_k^l/c \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{\left(t - T_{N_t^r}^r\right) \wedge Y_{N_t^r+1}^l}{c} \right\rfloor$$

Comme précédemment on a

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{N_t^n}{t} = \mathbb{E}\left[X^r\right]^{-1} \mathbb{E}\left[\left\lfloor Y^l/c \right\rfloor\right],$$

presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$.

Temps passé dans l'état sain (**S**)

De la même manière, dans l'intervalle $\left]T^r_{k-1}, T^r_k\right]$ le temps passé dans l'état sain est Y^l_k. Jusqu'à l'instant t, θ^n_t est

$$\theta^n_t = \sum_{k=1}^{N^r_t} Y^l_k + Y^l_{N^r_t+1} \wedge \left(t - T^r_{N^r_t}\right).$$

Toujours les mêmes arguments donnent

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\theta^n_t}{t} = \frac{\mathbb{E}\left[Y^l\right]}{\mathbb{E}\left[X^r\right]}.$$

presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$.

Comportement asymptotique du nombre de visites dans l'état dégradé léger (**DL**)

Dans l'intervalle $\left]T^r_{k-1}, T^r_k\right]$, on dénombre $K^r_k - \left\lfloor \frac{Y^l_k}{c} \right\rfloor - 1$ visites dans l'état dégradé léger. Par suite,

$$N^l_t = \sum_{k=1}^{N^r_t} \left(K^r_k - \left\lceil Y^l_k / c \right\rceil \right) + \left\lfloor \left(t - T^r_{N^r_t} / c \right) \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\left(t - T^r_{N^r_t} \right) \wedge Y^l_{N^r_t + 1}}{c} \right\rfloor$$

On a

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{N^l_t}{t} = \mathbb{E}\left[X^r\right]^{-1} \mathbb{E}\left[K^r - \left\lceil Y^l / c \right\rceil \right]$$

presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$. En fait, $N^v_t = N^l_t + N^n_t + N^r_t$.

Temps passé dans l'état dégradé léger

De la même manière, dans l'intervalle $\left]T^r_{k-1}, T^r_k\right]$ le temps passé dans l'état dégradé est Y^s_k. θ^l_t est donné par

$$\theta^l_t = \sum_{k=1}^{N^r_t} Y^s_k + \left(\left(t - T^r_{N^r_t}\right) \wedge Z^s_{N^r_t+1} - Y^l_{N^r_t+1}\right)_+ ,$$

et, presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\theta^l_t}{t} = \mathbb{E}\left[X^r\right]^{-1} \mathbb{E}\left[Y^s\right].$$

Résumé

Processus	Notation	Taux asymptotique
Nb de remises à neufs	N^r	$\frac{1}{\mathbb{E}[X^r]}$
Nb de défaillances	N^d	$\frac{\mathbb{P}(V^s > Z^d)}{\mathbb{E}[X^r]}$
Nb de dégradations significatives	N^s	$\frac{1-\mathbb{P}(V^s > Z^d)}{\mathbb{E}[X^r]}$

Asymptotiquement, N^r se comporte comme un processus de Poisson de paramètre $\frac{1}{\mathbb{E}[X^r]}$. Si $(\beta_k)_{k\geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(V^s > Z^d))$, on a

$$N_t^r = N_t^d + N_t^s, \qquad N_t^d = \sum_{1\leq k\leq N_t^r} \beta_k, \qquad N_t^s = \sum_{1\leq k\leq N_t^r} (1-\beta_k).$$

Résumé

K^r désigne le nombre de visites effectuées entre deux remises à neuf

Processus	Not.	$\lim_{t\to+\infty} t^{-1} \times$ Processus
Nombre de visites	N^v	$\mathbb{E}\left[K^r\right]/\mathbb{E}[X^r]$
Nb de visites dans l'état (**S**)	N^n	$\mathbb{E}\left[\lfloor \frac{Y^l}{c} \rfloor\right]/\mathbb{E}[X^r]$
Nb de visites dans l'état (**DL**)	N^l	$\mathbb{E}\left[K^r - \lceil \frac{Y^l}{c} \rceil\right]/\mathbb{E}[X^r]$
Temps passé dans l'état (**S**)	θ^n	$\mathbb{E}[Y^l]/\mathbb{E}[X^r]$
Temps passé dans l'état (**DL**)	θ^l	$\mathbb{E}[Y^s]/\mathbb{E}[X^r]$
Temps passé dans l'état (**DS**)	θ^s	$\mathbb{E}[X^r - Z^s]/\mathbb{E}[X^r]$

Comportement asymptotique de l'état du système

On note E_t l'état du système à l'instant t. Comme les défaillances sont réparées immédiatement, le système ne peut se trouver que dans 3 états presque sûrement :

- 0 : le système est sain (S),
- 1 : le système est dégradé léger (DL),
- 2 : le système est dégradé significativement (DS).

Comportement asymptotique de l'état du système

Soit D_t l'âge du système à l'instant t, i.e. $D_t = t - T^r_{N^r_t}$. $(E_t, D_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov homogène de loi connue, et pour toute fonction f mesurable bornée

$$\mathbb{E}(f(E_\infty, D_\infty)) = \frac{1}{\mathbb{E}(X^r)} \int_0^\infty f(0,t)\mathbb{P}(Y^l > t) + f(1,t)\mathbb{P}(Y^l \leq t, Y^s > t) + f(2,t)\mathbb{P}(Y^s \leq t, X^r > t)dt.$$

On retrouve la densité de D_∞ : $\frac{\mathbb{P}(X^r > x)}{\mathbb{E}(X^r)}$ et on en déduit la loi de l'état du système en l' infini

$$\mathbb{P}(E_\infty = S) = \frac{\mathbb{E}[Y^l]}{\mathbb{E}[X^r]}, \quad \mathbb{P}(E_\infty = DL) = \frac{\mathbb{E}[Y^s]}{\mathbb{E}[X^r]},$$
$$\mathbb{P}(E_\infty = DS) = \frac{\mathbb{E}[X^r - Z^s]}{\mathbb{E}[X^r]}.$$

Cas particulier de la loi exponentielle

On suppose que $Y^l \sim \mathcal{E}(\mu_l)$, $Y^s \sim \mathcal{E}(\mu_s)$, et $Y^d \sim \mathcal{E}(\lambda)$. On a

$$\mathbb{E}\left[X^r\right] = \frac{1}{\mu_s} + \frac{1}{\mu_l} + \frac{1}{\lambda}\,\mathbb{P}\left(V^s > Z^d\right) = \frac{1}{\lambda^r_\infty},$$

où, pour $\mu_s \neq \mu_l \neq \lambda$

$$\mathbb{P}\left(V^s > Z^d\right) = 1 - \frac{\mu_l \mu_s}{\mu_l - \mu_s}\left(\frac{e^{-\lambda c} - e^{-\mu_s c}}{\mu_s - \lambda}\,\frac{1}{1 - e^{-\mu_s c}} - \frac{e^{-\lambda c} - e^{-\mu_l c}}{\mu_l - \lambda}\,\frac{1}{1 - e^{-\mu_l c}}\right).$$

$$\mathbb{E}\left[K^r\right] = \frac{1}{\mu_l - \mu_s}\left(\frac{\mu_l}{1 - e^{-\mu_s c}} - \frac{\mu_s}{1 - e^{-\mu_l c}}\right).$$

$$\mathbb{E}\left[\left\lfloor Y^l / c \right\rfloor\right] = \frac{e^{-\mu_l c}}{1 - e^{-\mu_l c}}.$$

Comportement asymptotique de l'état du système

La loi de l'état du système quand t tend vers l'infini est donnée par

$$\mathbb{P}(E_\infty = S) = \frac{1}{\mu_l \mathbb{E}[X^r]}, \quad \mathbb{P}(E_\infty = DL) = \frac{1}{\mu_s \mathbb{E}[X^r]},$$
$$\mathbb{P}(E_\infty = DS) = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\mathbb{E}[X^r]} \mathbb{P}(V^s > Z^d).$$

Illustration de la convergence p.s. de $\frac{N_t^r}{t}$

On considère le jeu de paramètres $\mu_I = 2.10^{-3}$, $\mu_S = 10^{-3}$ et $\lambda = 10^{-4}$. On fixe aussi $c = 3190$.

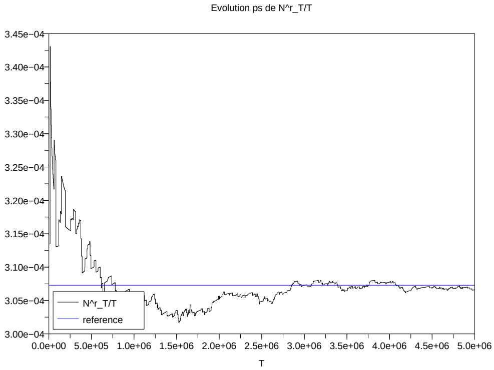


FIGURE: Convergence presque sûre de $\frac{N_t^r}{t}$

Illustration de la convergence p.s. de $\frac{N_t^d}{t}$

On considère le jeu de paramètres $\mu_I = 2.10^{-3}$, $\mu_S = 10^{-3}$ et $\lambda = 10^{-4}$. On fixe aussi $c = 3190$.

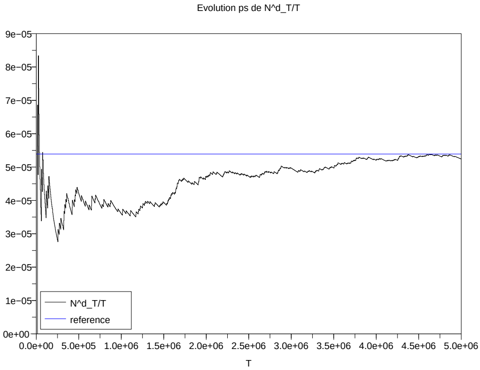


FIGURE: Convergence presque sûre de $\frac{N_t^r}{t}$

Méthode asymptotique

Nous nous plaçons dans le cas de lois exponentielles. Les formules précédentes permettent d'estimer les paramètres de manière simple en supposant la période d'observation suffisamment longue. En effet,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t^n}{N_t^r} &= \frac{e^{-\mu_l c}}{1-e^{-\mu_l c}}, \\
\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t^v}{N_t^r} &= \mathbb{E}\left[K^r\right] = \frac{1}{\mu_l-\mu_s}\left(\frac{\mu_l}{1-e^{-\mu_s c}} - \frac{\mu_s}{1-e^{-\mu_l c}}\right), \\
\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t^d}{N_t^r} &= \mathbb{P}\left(V^s > Z^d\right), \\
\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{N_t^r} &= \frac{1}{\mu_l} + \frac{1}{\mu_s} + \frac{1}{\lambda}\mathbb{P}\left(V^s > Z^d\right).
\end{aligned}$$

De la première équation, on déduit que

$$\mu_l = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{c}\log\left(\frac{N_t^n}{N_t^n+N_t^r}\right). \tag{1}$$

Méthode asympotique

On obtient μ_s en résolvant numériquement la deuxième équation : μ_s est solution de

$$\frac{1}{1-e^{-\mu_s c}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{N_t^v}{N_t^r} - \frac{\mu_s}{\mu_l} \lim_{t\to+\infty} \frac{N_t^l}{N_t^r}.$$

Ce qui, compte tenu de la troisième équation fournit

$$\lambda = \lim_{t\to+\infty} \frac{\mu_l \mu_s N_t^d}{\mu_l \mu_s t - N_t^r(\mu_s+\mu_l)}.$$

Comparaison avec l'EMV

Nous pouvons estimer les paramètres μ_I, μ_S et λ par EMV. Sur un jeu de données simulées

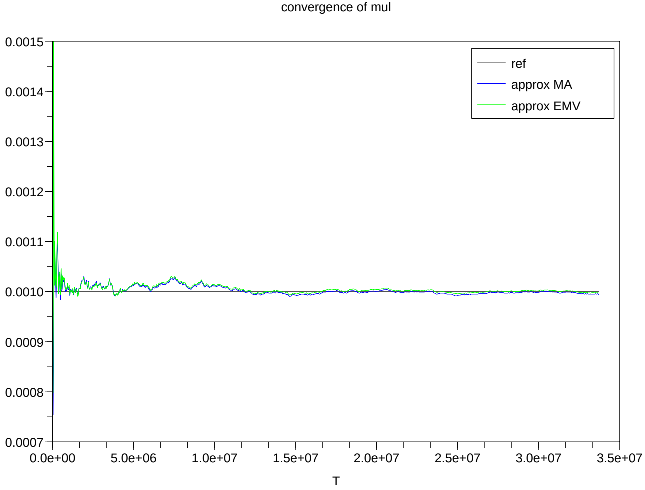
$$\mu_I = 10^{-3}, \quad \mu_S = 5.10^{-4}, \quad \lambda = 10^{-4}, \quad c = 1000, \quad T = 10^8.$$

La méthode asymptotique et l'EMV ont donné les résultats suivants

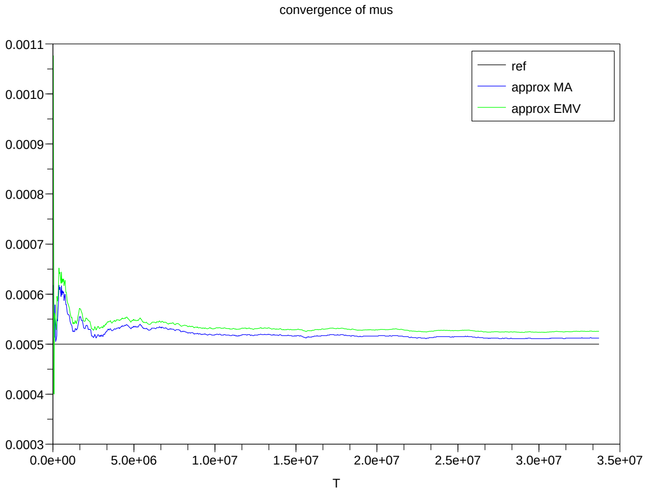
Méthode	μ_I	μ_S	λ	logvraisemblance
EMV	1.000777e-03	5.18232e-04	9.213594e-05	-96255.75
Asymptotique	1.0008e-03	5.052e-04	1.009e-4	

Méthode	temps de calcul (s)
EMV	293
Asymptotique	$< 10^{-4}$

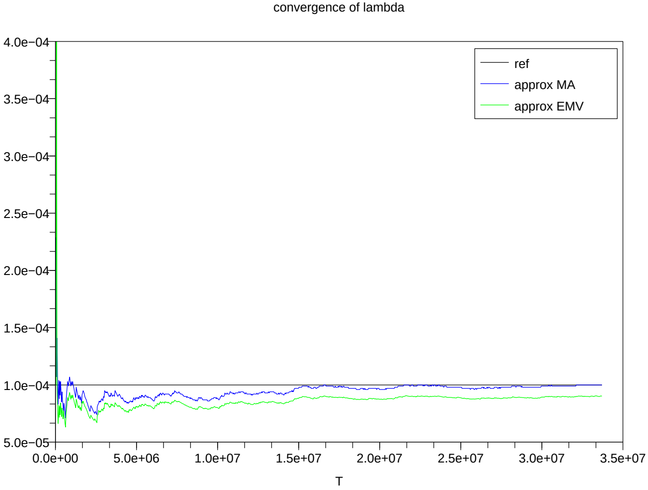
Convergence de μ_I



Convergence de μ_s



Convergence de λ



Nous décrivons dans cette section une méthode pour déterminer une périodicité optimale des visites. L'idée principale est de minimiser à la fois les visites “inutiles”, c'est à dire les visites pour lesquelles le système est dans l'état (**S**) ou (**DL**), et le nombre de défaillances.

2 fonctions de coût : première idée

La première idée consiste à minimiser la somme de la probabilité d'obtenir une visite "inutile" et de la probabilité d'obtenir une défaillance. On s'intéresse donc à la quantité

$$H(c) = \frac{1}{2} \underbrace{\mathbb{P}(Z^s > c)}_{\text{visite inutile}} + \frac{1}{2} \underbrace{\mathbb{P}\left(Z^d \leq c\right)}_{\text{défaillance}}.$$

2 fonctions de coût : seconde idée

La période d'observation étant $[0, T]$, on choisit c de sorte à minimiser $N_T^i + N_T^d$ (N_T^i désignant le nombre de visites "inutiles", c'est à dire le nombre de visites pour lesquelles le système est dans l'état (**S**) ou (**DL**)),

$$S_T(c) = \frac{1}{2}\frac{N_T^i}{N_T^v} + \frac{1}{2}\frac{N_T^d}{N_T^v} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{N_T^r}{N_T^v}\right) + \frac{1}{2}\frac{N_T^d}{N_T^v} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{N_T^s}{N_T^v}\right).$$

Si on suppose que la période d'observation est longue, on peut choisir c en minimisant $S(c) = \lim_{T\to+\infty} S_T(c)$ soit

$$S(c) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c\,\mathbb{P}\left(V^s \leq Z^d\right)}{\mathbb{E}\left[V^s\right]}\right),$$

fonction dont nous avons une formule explicite.

Graphe de H et S

On choisit le jeu de paramètres $\mu_I = 2.10^{-3}$, $\mu_S = 10^{-3}$, $\lambda = 5.10^{-3}$

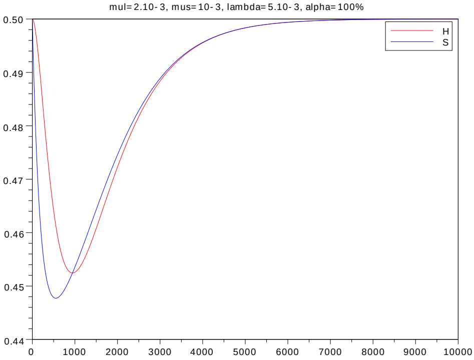


FIGURE: Evolution de H et S en fonction de c

Conclusion

La méthode asymptotique est très rapide et donne de bons résultats.

- Il nous manque des intervalles de confiance sur nos estimateurs issus de la méthode asymptotique (donc un TCL pour des quantités du type $\frac{N_t^v}{N_t^r}$)
- Nous avons supposé la périodicité des visites constante. Comment généraliser cela ?