

# Processus de Lévy bivariés et application à des données SNCF

S. Mercier (LMA-Pau, UPPA)

M. Roussignol (LAMA - Université Paris-Est Marne-la-Vallée)

C. Meier-Hirmer (SNCF)



*Groupe de travail FIMA, Grenoble, le 9 décembre 2010*

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Etude théorique
- 3 Application aux données SNCF
- 4 Conclusion



# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Etude théorique
- 3 Application aux données SNCF
- 4 Conclusion



# Problématique industrielle

- Objectif : optimiser la maintenance préventive d'une *voie de chemin de fer*, afin d'assurer que la voie de chemin de fer reste utilisable avec une grande probabilité.
- Le niveau de dégradation de la voie de chemin de fer est :

→ aléatoire,

# Problématique industrielle

- Objectif : optimiser la maintenance préventive d'une *voie de chemin de fer*, afin d'assurer que la voie de chemin de fer reste utilisable avec une grande probabilité.
- Le niveau de dégradation de la voie de chemin de fer est :
  - ▶ *aléatoire*,
  - ▶ mesuré par deux indicateurs croissants *dépendants* NL and NT,
  - ▶ observé lors d'*inspections*, que l'on suppose parfaites.

# Problématique industrielle

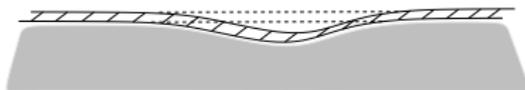
- Objectif : optimiser la maintenance préventive d'une *voie de chemin de fer*, afin d'assurer que la voie de chemin de fer reste utilisable avec une grande probabilité.
- Le niveau de dégradation de la voie de chemin de fer est :
  - ▶ *aléatoire*,
  - ▶ mesuré par deux indicateurs croissants *dépendants* NL and NT,
  - ▶ observé lors d'*inspections*, que l'on suppose parfaites.

# Problématique industrielle

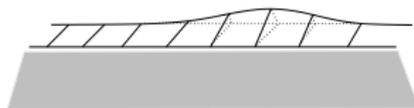
- Objectif : optimiser la maintenance préventive d'une *voie de chemin de fer*, afin d'assurer que la voie de chemin de fer reste utilisable avec une grande probabilité.
- Le niveau de dégradation de la voie de chemin de fer est :
  - ▶ *aléatoire*,
  - ▶ mesuré par deux indicateurs croissants *dépendants* NL and NT,
  - ▶ observé lors d'*inspections*, que l'on suppose parfaites.

# Problématique industrielle

- Objectif : optimiser la maintenance préventive d'une *voie de chemin de fer*, afin d'assurer que la voie de chemin de fer reste utilisable avec une grande probabilité.
- Le niveau de dégradation de la voie de chemin de fer est :
  - ▶ *aléatoire*,
  - ▶ mesuré par deux indicateurs croissants *dépendants* NL and NT,
  - ▶ observé lors d'*inspections*, que l'on suppose parfaites.



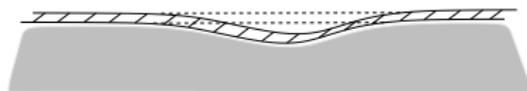
Longitudinal levelling (NL)



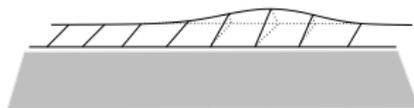
Transversal levelling (NT)

# Problématique industrielle

- Objectif : optimiser la maintenance préventive d'une *voie de chemin de fer*, afin d'assurer que la voie de chemin de fer reste utilisable avec une grande probabilité.
- Le niveau de dégradation de la voie de chemin de fer est :
  - ▶ *aléatoire*,
  - ▶ mesuré par deux indicateurs croissants *dépendants* NL and NT,
  - ▶ observé lors d'*inspections*, que l'on suppose parfaites.



Longitudinal levelling (NL)



Transversal levelling (NT)

- La voie de chemin de fer est *inutilisable* lorsque NL ou NT est au-delà d'un certain seuil *correctif* (donné).

# Problématique industrielle

Lors d'une inspection :

- si **NL** ou **NT** est au-dessus du seuil *correctif* associé : on effectue une action de maintenance qui ramène le niveau de **NL** et de **NT** en dessous de leurs seuils respectifs,
- étant donnée une observation de **NL** et **NT** en dessous de leurs seuils respectifs, il s'agit de choisir la date de la prochaine maintenance, de telle sorte que la voie de chemin de fer reste utilisable jusque là avec une grande probabilité.

# Problématique industrielle

Lors d'une inspection :

- si **NL** ou **NT** est au-dessus du seuil *correctif* associé : on effectue une action de maintenance qui ramène le niveau de **NL** et de **NT** en dessous de leurs seuils respectifs,
- étant donnée une observation de **NL** et **NT** en dessous de leurs seuils respectifs, il s'agit de choisir la date de la prochaine maintenance, de telle sorte que la voie de chemin de fer reste utilisable jusque là avec une grande probabilité.

# Modélisation

- Modèle univarié pour **NL** : processus *Gamma univarié* [C. Meier-Hirmer 2007, van Noortwijk 2009].
- Selon les experts : idem pour **NT**.
- **NL** et **NT** sont dépendants : besoin d'un modèle *bivarié* avec des processus marginaux de type Gamma univariés.
- On souhaiterait avoir :

Un processus bivarié de type Gamma bivarié

ou un processus de type Gamma bivarié avec des marges de type Gamma univariés

ou encore un processus de type Gamma bivarié

# Modélisation

- Modèle univarié pour **NL** : processus *Gama univarié* [C. Meier-Hirmer 2007, van Noortwijk 2009].
- Selon les experts : idem pour **NT**.
- **NL** et **NT** sont dépendants : besoin d'un modèle *bivarié* avec des processus marginaux de type Gamma univariés.
- On souhaiterait avoir :

# Modélisation

- Modèle univarié pour **NL** : processus *Gamma univarié* [C. Meier-Hirmer 2007, van Noortwijk 2009].
- Selon les experts : idem pour **NT**.
- **NL** et **NT** sont dépendants : besoin d'un modèle *bivarié* avec des processus marginaux de type Gamma univariés.
- On souhaiterait avoir :
  - une dépendance positive entre les processus marginaux.

# Modélisation

- Modèle univarié pour **NL** : processus *Gama univarié* [C. Meier-Hirmer 2007, van Noortwijk 2009].
- Selon les experts : idem pour **NT**.
- **NL** et **NT** sont dépendants : besoin d'un modèle *bivarié* avec des processus marginaux de type Gamma univariés.
- On souhaiterait avoir :
  - ▶ une dépendance *positive* entre les processus marginaux,
  - ▶ une propriété de *vieillesse* pour les temps d'atteinte d'un seuil (= durées de fonctionnement).

# Modélisation

- Modèle univarié pour **NL** : processus *Gama univarié* [C. Meier-Hirmer 2007, van Noortwijk 2009].
- Selon les experts : idem pour **NT**.
- **NL** et **NT** sont dépendants : besoin d'un modèle *bivarié* avec des processus marginaux de type Gamma univariés.
- On souhaiterait avoir :
  - ▶ une dépendance *positive* entre les processus marginaux,
  - ▶ une propriété de *vieillesse* pour les temps d'atteinte d'un seuil (= durées de fonctionnement).

# Modélisation

- Modèle univarié pour **NL** : processus *Gama univarié* [C. Meier-Hirmer 2007, van Noortwijk 2009].
- Selon les experts : idem pour **NT**.
- **NL** et **NT** sont dépendants : besoin d'un modèle *bivarié* avec des processus marginaux de type Gamma univariés.
- On souhaiterait avoir :
  - ▶ une dépendance *positive* entre les processus marginaux,
  - ▶ une propriété de *vieillesse* pour les temps d'atteinte d'un seuil (= durées de fonctionnement).

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Etude théorique**
- 3 Application aux données SNCF
- 4 Conclusion



# Plan de l'exposé

## 1 Introduction

## 2 Etude théorique

- Le modèle stochastique
  - Constructions de processus Gamma-Lévy bivariés
  - Estimation des paramètres
  - Politique de maintenance préventive

## 3 Application aux données SNCF

## 4 Conclusion



# Processus de Lévy sur $\mathbb{R}^2$

- Processus de *Lévy* sur  $\mathbb{R}^2$  :

- ▶ processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  cadlåg, à accroissements *indépendants* et *homogènes*,
- ▶  $X_0 = (0, 0)$  p.s..

- Structure :

$$X_t = t\gamma + W_t + S_t$$

où :

- $\gamma$  : vecteur de dérive sur  $\mathbb{R}^2$ ,
- $(W_t)_{t \geq 0}$  : mouvement brownien,
- $(S_t)_{t \geq 0}$  : terme correspondant aux sauts, à variation finie.

# Processus de Lévy sur $\mathbb{R}^2$

- Processus de *Lévy* sur  $\mathbb{R}^2$  :
  - ▶ processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  cadlåg, à accroissements *indépendants* et *homogènes*,
  - ▶  $X_0 = (0, 0)$  p.s..

- Structure :

$$X_t = t\gamma + W_t + S_t$$

où :

- $\gamma$  : vecteur dérive  $\gamma \in \mathbb{R}^2$ ,
- $(W_t)_{t \geq 0}$  : mouvement brownien bivarié,
- $(S_t)_{t \geq 0}$  : saut *compensé* par  $\gamma$ .

# Processus de Lévy sur $\mathbb{R}^2$

- Processus de *Lévy* sur  $\mathbb{R}^2$  :
  - ▶ processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  cadlåg, à accroissements *indépendants* et *homogènes*,
  - ▶  $X_0 = (0, 0)$  p.s..

- Structure :

$$X_t = t\gamma + W_t + S_t$$

où :

- $t\gamma$  : terme de dérive, où  $\gamma \in \mathbb{R}^2$ ,
- $W_t$  : mouvement brownien bivarié,
- $S_t$  : terme correspondant aux sauts.

# Processus de Lévy sur $\mathbb{R}^2$

- Processus de *Lévy* sur  $\mathbb{R}^2$  :
  - ▶ processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  cadlåg, à accroissements *indépendants* et *homogènes*,
  - ▶  $X_0 = (0, 0)$  p.s..

- Structure :

$$X_t = t\gamma + W_t + S_t$$

où :

- ▶  $t\gamma$  : terme de dérive, où  $\gamma \in \mathbb{R}^2$ ,
- ▶  $(W_t)_{t \geq 0}$  : mouvement brownien,
- ▶  $(S_t)_{t \geq 0}$  : terme correspondant aux sauts,
- ▶ termes *indépendants*.

# Processus de Lévy sur $\mathbb{R}^2$

- Processus de *Lévy* sur  $\mathbb{R}^2$  :
  - ▶ processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  cadlåg, à accroissements *indépendants* et *homogènes*,
  - ▶  $X_0 = (0, 0)$  p.s..

- Structure :

$$X_t = t\gamma + W_t + S_t$$

où :

- ▶  $t\gamma$  : terme de dérive, où  $\gamma \in \mathbb{R}^2$ ,
- ▶  $(W_t)_{t \geq 0}$  : mouvement brownien,
- ▶  $(S_t)_{t \geq 0}$  : terme correspondant aux sauts,
- ▶ termes *indépendants*.

# Processus de Lévy sur $\mathbb{R}^2$

- Processus de *Lévy* sur  $\mathbb{R}^2$  :
  - ▶ processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  cadlåg, à accroissements *indépendants* et *homogènes*,
  - ▶  $X_0 = (0, 0)$  p.s..

- Structure :

$$X_t = t\gamma + W_t + S_t$$

où :

- ▶  $t\gamma$  : terme de dérive, où  $\gamma \in \mathbb{R}^2$ ,
- ▶  $(W_t)_{t \geq 0}$  : mouvement brownien,
- ▶  $(S_t)_{t \geq 0}$  : terme correspondant aux sauts,
- ▶ termes *indépendants*.

# Processus de Lévy sur $\mathbb{R}^2$

- Processus de *Lévy* sur  $\mathbb{R}^2$  :
  - ▶ processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  cadlåg, à accroissements *indépendants* et *homogènes*,
  - ▶  $X_0 = (0, 0)$  p.s..

- Structure :

$$X_t = t\gamma + W_t + S_t$$

où :

- ▶  $t\gamma$  : terme de dérive, où  $\gamma \in \mathbb{R}^2$ ,
- ▶  $(W_t)_{t \geq 0}$  : mouvement brownien,
- ▶  $(S_t)_{t \geq 0}$  : terme correspondant aux sauts,
- ▶ termes *indépendants*.

# Processus de Lévy sur $\mathbb{R}^2$

- Processus de *Lévy* sur  $\mathbb{R}^2$  :
  - ▶ processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  cadlåg, à accroissements *indépendants* et *homogènes*,
  - ▶  $X_0 = (0, 0)$  p.s..

- Structure :

$$X_t = t\gamma + W_t + S_t$$

où :

- ▶  $t\gamma$  : terme de dérive, où  $\gamma \in \mathbb{R}^2$ ,
- ▶  $(W_t)_{t \geq 0}$  : mouvement brownien,
- ▶  $(S_t)_{t \geq 0}$  : terme correspondant aux sauts,
- ▶ termes *indépendants*.

# Processus de Lévy sur $\mathbb{R}^2$

- Les sauts de  $(X_t)_{t \geq 0}$  sont contrôlés par sa mesure de Lévy  $\mu$  :

$$\mu(A) = \mathbb{E}(\text{card}(\{0 \leq t \leq 1 : \Delta X_t = X_t - X_{t-} \neq 0 \text{ et } \Delta X_t \in A\}))$$

pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ,

- Conditions techniques :

$\mu$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$\mu(\{(0, 0)\}) = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}^2} (|x|^2 \wedge 1) \mu(dx) < +\infty.$$

# Processus de Lévy sur $\mathbb{R}^2$

- Les sauts de  $(X_t)_{t \geq 0}$  sont contrôlés par sa mesure de Lévy  $\mu$  :

$$\mu(A) = \mathbb{E}(\text{card}(\{0 \leq t \leq 1 : \Delta X_t = X_t - X_{t-} \neq 0 \text{ et } \Delta X_t \in A\}))$$

pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ,

- Conditions techniques :

$\mu$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$\mu(\{(0, 0)\}) = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}^2} (|x|^2 \wedge 1) \mu(dx) < +\infty.$$

# Processus de Lévy croissant sur $\mathbb{R}^2$

- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est à *variations bornées* ssi

- ▶  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ ,
- ▶  $W_t \equiv 0$ .

- Dans ce cas :

$$X_t = t\gamma_0 + \underbrace{\sum_{s \leq t \text{ tel que } |\Delta X_s| \neq 0} \Delta X_s}_{\text{converge}}$$

- On a équivalence entre :

$$\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$$

$$W_t \equiv 0, \gamma_0 = 0 \text{ et } \int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$$

- Dans toute la suite :  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy positif tel que  $\gamma_0 = (0, 0)$ .

# Processus de Lévy croissant sur $\mathbb{R}^2$

- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est à *variations bornées* ssi

- ▶  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty,$
- ▶  $W_t \equiv 0.$

- Dans ce cas :

$$X_t = t\gamma_0 + \underbrace{\sum_{s \leq t \text{ tel que } |\Delta X_s| \neq 0} \Delta X_s}_{\text{converge}}$$

- On a équivalence entre :

$$\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$$

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \mu(dx) < +\infty$$

$$W_t = 0, \gamma_0 = \int_{|x| \leq 1} x \mu(dx) \text{ et } \int_{|x| > 1} x^2 \mu(dx) < +\infty$$

- Dans toute la suite :  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy positif tel que  $\gamma_0 = (0, 0).$

# Processus de Lévy croissant sur $\mathbb{R}^2$

- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est à *variations bornées* ssi

- ▶  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ ,
- ▶  $W_t \equiv 0$ .

- Dans ce cas :

$$X_t = t\gamma_0 + \underbrace{\sum_{s \leq t \text{ tel que } |\Delta X_s| \neq 0} \Delta X_s}_{\text{converge}}$$

- On a équivalence entre :

$$\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$$

$$\sum_{s \leq t \text{ tel que } |\Delta X_s| \neq 0} |\Delta X_s| < +\infty$$

$$\sum_{s \leq t \text{ tel que } |\Delta X_s| \neq 0} |\Delta X_s| < +\infty \text{ pour tout } t \geq 0$$

- Dans toute la suite :  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy positif tel que  $\gamma_0 = (0, 0)$ .

# Processus de Lévy croissant sur $\mathbb{R}^2$

- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est à *variations bornées* ssi

- ▶  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ ,
- ▶  $W_t \equiv 0$ .

- Dans ce cas :

$$X_t = t\gamma_0 + \underbrace{\sum_{s \leq t \text{ tel que } |\Delta X_s| \neq 0} \Delta X_s}_{\text{converge}}$$

- On a équivalence entre :

•  $(X_t)_{t \geq 0}$  est croissant p.s.,

•  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy positif,

•  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy positif tel que

- Dans toute la suite :  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy positif tel que  $\gamma_0 = (0, 0)$ .

# Processus de Lévy croissant sur $\mathbb{R}^2$

- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est à *variations bornées* ssi

- ▶  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ ,
- ▶  $W_t \equiv 0$ .

- Dans ce cas :

$$X_t = t\gamma_0 + \underbrace{\sum_{s \leq t \text{ tel que } |\Delta X_s| \neq 0} \Delta X_s}_{\text{converge}}$$

- On a équivalence entre :

- ▶  $(X_t)_{t \geq 0}$  est *croissant* p.s.,
- ▶  $(X_t)_{t \geq 0}$  est *positif* p.s.,
- ▶  $W_t \equiv 0$ ,  $\gamma_0 \geq 0$  et  $\mu$  est portée par  $\mathbb{R}_+^2$  telle que  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ .

- Dans toute la suite :  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy positif tel que  $\gamma_0 = (0, 0)$ .

# Processus de Lévy croissant sur $\mathbb{R}^2$

- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est à *variations bornées* ssi

- ▶  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ ,
- ▶  $W_t \equiv 0$ .

- Dans ce cas :

$$X_t = t\gamma_0 + \underbrace{\sum_{s \leq t \text{ tel que } |\Delta X_s| \neq 0} \Delta X_s}_{\text{converge}}$$

- On a équivalence entre :

- ▶  $(X_t)_{t \geq 0}$  est *croissant* p.s.,
- ▶  $(X_t)_{t \geq 0}$  est *positif* p.s.,
- ▶  $W_t \equiv 0$ ,  $\gamma_0 \geq 0$  et  $\mu$  est portée par  $\mathbb{R}_+^2$  telle que  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ .

- Dans toute la suite :  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy positif tel que  $\gamma_0 = (0, 0)$ .

# Processus de Lévy croissant sur $\mathbb{R}^2$

- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est à *variations bornées* ssi

- ▶  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ ,
- ▶  $W_t \equiv 0$ .

- Dans ce cas :

$$X_t = t\gamma_0 + \underbrace{\sum_{s \leq t \text{ tel que } |\Delta X_s| \neq 0} \Delta X_s}_{\text{converge}}$$

- On a équivalence entre :

- ▶  $(X_t)_{t \geq 0}$  est *croissant* p.s.,
- ▶  $(X_t)_{t \geq 0}$  est *positif* p.s.,
- ▶  $W_t \equiv 0$ ,  $\gamma_0 \geq 0$  et  $\mu$  est portée par  $\mathbb{R}_+^2$  telle que  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ .

- Dans toute la suite :  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy positif tel que  $\gamma_0 = (0, 0)$ .

# Processus de Lévy croissant sur $\mathbb{R}^2$

- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est à *variations bornées* ssi

- ▶  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ ,
- ▶  $W_t \equiv 0$ .

- Dans ce cas :

$$X_t = t\gamma_0 + \underbrace{\sum_{s \leq t \text{ tel que } |\Delta X_s| \neq 0} \Delta X_s}_{\text{converge}}$$

- On a équivalence entre :

- ▶  $(X_t)_{t \geq 0}$  est *croissant* p.s.,
- ▶  $(X_t)_{t \geq 0}$  est *positif* p.s.,
- ▶  $W_t \equiv 0$ ,  $\gamma_0 \geq 0$  et  $\mu$  est portée par  $\mathbb{R}_+^2$  telle que  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ .

- Dans toute la suite :  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy positif tel que  $\gamma_0 = (0, 0)$ .

# Processus de Lévy croissant sur $\mathbb{R}^2$

- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est à *variations bornées* ssi

- ▶  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ ,
- ▶  $W_t \equiv 0$ .

- Dans ce cas :

$$X_t = t\gamma_0 + \underbrace{\sum_{s \leq t \text{ tel que } |\Delta X_s| \neq 0} \Delta X_s}_{\text{converge}}$$

- On a équivalence entre :

- ▶  $(X_t)_{t \geq 0}$  est *croissant* p.s.,
- ▶  $(X_t)_{t \geq 0}$  est *positif* p.s.,
- ▶  $W_t \equiv 0$ ,  $\gamma_0 \geq 0$  et  $\mu$  est portée par  $\mathbb{R}_+^2$  telle que  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ .

- Dans toute la suite :  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy positif tel que  $\gamma_0 = (0, 0)$ .

# Processus de Lévy sur $\mathbb{R}_+^2$ (avec décalage nul)

- Transformée de *Laplace* :

$$\mathbb{E} \left( e^{-\langle s, X_t \rangle} \right) = \exp \left( t \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{-\langle x, y \rangle} - 1 \right) \mu(dy) \right)$$

pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^2$  où  $\mu$  est portée par  $\mathbb{R}_+^2$  telle que  $\mu(\{(0, 0)\}) = 0$ ,  
 $\int_{\mathbb{R}^2} (|x|^2 \wedge 1) \mu(dx) < +\infty$  et  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ .

- Le processus *marginal*  $(X_t^{(1)})_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy sur  $\mathbb{R}_+$  de mesure de Lévy :

$$\mu_1(dx_1) = \int_{\mathbb{R}} \mu(dx_1, dx_2).$$

(idem pour  $(X_t^{(2)})_{t \geq 0}$ ).

# Processus de Lévy sur $\mathbb{R}_+^2$ (avec décalage nul)

- Transformée de *Laplace* :

$$\mathbb{E} \left( e^{-\langle s, X_t \rangle} \right) = \exp \left( t \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{-\langle x, y \rangle} - 1 \right) \mu(dy) \right)$$

pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^2$  où  $\mu$  est portée par  $\mathbb{R}_+^2$  telle que  $\mu(\{(0, 0)\}) = 0$ ,  
 $\int_{\mathbb{R}^2} (|x|^2 \wedge 1) \mu(dx) < +\infty$  et  $\int_{|x| \leq 1} |x| \mu(dx) < +\infty$ .

- Le processus *marginal*  $(X_t^{(1)})_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy sur  $\mathbb{R}_+$  de mesure de Lévy :

$$\mu_1(dx_1) = \int_{\mathbb{R}} \mu(dx_1, dx_2),$$

(idem pour  $(X_t^{(2)})_{t \geq 0}$ ).

# Propriétés liées à l'association positive

## Proposition

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un *processus de Lévy* sur  $\mathbb{R}_+^2$ , avec  $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$ .

Alors, pour tous  $0 \leq t_1 < t_2$ , les v.a.r.  $X_{t_1}^{(1)}$  et  $X_{t_2}^{(2)}$  sont positivement quadrant dépendantes, au sens où :

$$\left[ X_{t_2}^{(2)} | X_{t_1}^{(1)} > x_1 \right] \succsto X_{t_2}^{(2)}$$

et

$$\left[ X_{t_2}^{(2)} | X_{t_1}^{(1)} \leq x_1 \right] \precsto X_{t_2}^{(2)}$$

pour tout  $x_1 \in \mathbb{R}_+$ .

(conséquence de [Bäuerle - Blatter - Müller 2007])

# Propriétés liées au caractère markovien

- Pour un système modélisé par un processus de dégradation croissante : durée de fonctionnement = temps d'atteinte de seuils.
- Une durée de fonctionnement a des propriétés de vieillissement.

# Propriétés liées au caractère markovien

- Pour un système modélisé par un processus de dégradation croissante : durée de fonctionnement = temps d'atteinte de seuils.
- Une durée de fonctionnement a des propriétés de vieillissement.

## Proposition

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy sur  $\mathbb{R}_+^2$ , avec  $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$ .

- Soit  $\mathcal{U}$  un ensemble clos vers le haut (closed upper set). On note  $T_{\mathcal{U}} = \inf(t > 0 : X_t \in \mathcal{U})$  le temps d'atteinte de  $\mathcal{U}$ . Alors  $T_{\mathcal{U}}$  est NBU (New Better Than Used) :  $[T_{\mathcal{U}} - t | T_{\mathcal{U}} > t] \prec_{sto} T_{\mathcal{U}}$  pour tout  $t \geq 0$ .
- Pour  $i \in \{1, 2\}$ , soient  $K_i > 0$  et  $T_{K_i}^{(i)} = \inf(t > 0 : X_t^{(i)} \geq K_i)$ . Le couple  $(T_{K_1}^{(1)}, T_{K_2}^{(2)})$  est alors NBU bivarié au sens où, pour tous  $s_1, s_2, t > 0$  :
 
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(T_{K_1}^{(1)} > t + s_1, T_{K_2}^{(2)} > t + s_2 \mid T_{K_1}^{(1)} > t, T_{K_2}^{(2)} > t\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(T_{K_1}^{(1)} > s_1, T_{K_2}^{(2)} > s_2\right). \end{aligned}$$

# Propriétés liées au caractère markovien

- Pour un système modélisé par un processus de dégradation croissante : durée de fonctionnement = temps d'atteinte de seuils.
- Une durée de fonctionnement a des propriétés de vieillissement.

## Proposition

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy sur  $\mathbb{R}_+^2$ , avec  $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$ .

- Soit  $\mathcal{U}$  un ensemble clos vers le haut (closed upper set). On note  $T_{\mathcal{U}} = \inf(t > 0 : X_t \in \mathcal{U})$  le temps d'atteinte de  $\mathcal{U}$ . Alors  $T_{\mathcal{U}}$  est NBU (New Better Than Used) :  $[T_{\mathcal{U}} - t | T_{\mathcal{U}} > t] \prec_{sto} T_{\mathcal{U}}$  pour tout  $t \geq 0$ .

- Pour  $i \in \{1, 2\}$ , soient  $K_i > 0$  et  $T_{K_i}^{(i)} = \inf(t > 0 : X_t^{(i)} \geq K_i)$ . Le couple  $(T_{K_1}^{(1)}, T_{K_2}^{(2)})$  est alors NBU bivarié au sens où, pour tous  $s_1, s_2, t > 0$  :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(T_{K_1}^{(1)} > t + s_1, T_{K_2}^{(2)} > t + s_2 \mid T_{K_1}^{(1)} > t, T_{K_2}^{(2)} > t\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(T_{K_1}^{(1)} > s_1, T_{K_2}^{(2)} > s_2\right). \end{aligned}$$

➡ bon candidat pour un modèle de *dégradation bivarié*.

# Contrainte sur $\rho_X$

## Proposition

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy bivarié sur  $\mathbb{R}_+^2$  et soit

$$U_X(\mathbf{x}) = U_X(x_1, x_2) = \int_{[x_1, +\infty[} \int_{[x_2, +\infty[} \mu_X(dy),$$

$$U_i(x_i) = \int_{[x_i, +\infty[} \mu_i(dy)$$

les intégrales de queue de  $(X_t)_{t \geq 0}$  et de  $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$ . Alors :

$$\rho_{X_t} := \rho_X = \frac{\iint_{\mathbb{R}_+^2} U_X(u_1, u_2) du_1 du_2}{\sqrt{v_1^X v_2^X}} \leq \rho_{\max}(U_1, U_2) = \frac{\iint_{\mathbb{R}_+^2} U^{\parallel}(u_1, u_2) du_1 du_2}{\sqrt{v_1^X v_2^X}}$$

où :

- $v_i^X = \text{var}(X_1^{(i)})$ ,
- $U^{\parallel}(u_1, u_2) = U_1(u_1) \wedge U_2(u_2)$  (cas de la complète dépendance).

# Modèle de dégradation

- Processus Gamma *univarié*  $(Z_t)_{t \geq 0}$  de paramètres  $(a, b)$  :
  - ▶ processus de *Lévy positif* tel que

$$\gamma_0 = 0 \text{ et } \nu(dz) = a \frac{e^{-bz}}{z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z) dz,$$

- ▶  $Z_t$  suit la loi Gamma  $\Gamma(at, b)$  de densité

$$f_{at,b}(x) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

- Modèle de dégradation bivarié  $(X_t)_{t \geq 0}$  :

– processus de Lévy positif  $Z_t$

– processus homogène  $X_t$

– processus  $X_t$  homogène

# Modèle de dégradation

- Processus Gamma *univarié*  $(Z_t)_{t \geq 0}$  de paramètres  $(a, b)$  :
  - ▶ processus de *Lévy positif* tel que

$$\gamma_0 = 0 \text{ et } \nu(dz) = a \frac{e^{-bz}}{z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z) dz,$$

- ▶  $Z_t$  suit la loi Gamma  $\Gamma(at, b)$  de densité

$$f_{at,b}(x) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

- Modèle de dégradation bivarié  $(X_t)_{t \geq 0}$  :

# Modèle de dégradation

- Processus Gamma *univarié*  $(Z_t)_{t \geq 0}$  de paramètres  $(a, b)$  :
  - ▶ processus de *Lévy positif* tel que

$$\gamma_0 = 0 \text{ et } \nu(dz) = a \frac{e^{-bz}}{z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z) dz,$$

- ▶  $Z_t$  suit la loi Gamma  $\Gamma(at, b)$  de densité

$$f_{at,b}(x) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

- Modèle de dégradation bivarié  $(X_t)_{t \geq 0}$  :

- ▶ processus de Lévy sur  $\mathbb{R}_+^2$

Processus Gamma-Lévy

# Modèle de dégradation

- Processus Gamma *univarié*  $(Z_t)_{t \geq 0}$  de paramètres  $(a, b)$  :
  - ▶ processus de *Lévy positif* tel que

$$\gamma_0 = 0 \text{ et } \nu(dz) = a \frac{e^{-bz}}{z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z) dz,$$

- ▶  $Z_t$  suit la loi Gamma  $\Gamma(at, b)$  de densité

$$f_{at,b}(x) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

- Modèle de dégradation bivarié  $(X_t)_{t \geq 0}$  :
  - ▶ processus de *Lévy* sur  $\mathbb{R}_+^2$ ,
  - ▶ processus marginaux : processus *Gamma* de paramètres  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$ .

# Modèle de dégradation

- Processus Gamma *univarié*  $(Z_t)_{t \geq 0}$  de paramètres  $(a, b)$  :
  - ▶ processus de *Lévy positif* tel que

$$\gamma_0 = 0 \text{ et } \nu(dz) = a \frac{e^{-bz}}{z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z) dz,$$

- ▶  $Z_t$  suit la loi Gamma  $\Gamma(at, b)$  de densité

$$f_{at,b}(x) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

- Modèle de dégradation bivarié  $(X_t)_{t \geq 0}$  :
  - ▶ processus de *Lévy* sur  $\mathbb{R}_+^2$ ,
  - ▶ processus marginaux : processus *Gamma* de paramètres  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$ .

# Modèle de dégradation

- Processus Gamma *univarié*  $(Z_t)_{t \geq 0}$  de paramètres  $(a, b)$  :
  - ▶ processus de *Lévy positif* tel que

$$\gamma_0 = 0 \text{ et } \nu(dz) = a \frac{e^{-bz}}{z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z) dz,$$

- ▶  $Z_t$  suit la loi Gamma  $\Gamma(at, b)$  de densité

$$f_{at,b}(x) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

- Modèle de dégradation bivarié  $(X_t)_{t \geq 0}$  :
  - ▶ processus de *Lévy* sur  $\mathbb{R}_+^2$ ,
  - ▶ processus marginaux : processus *Gamma* de paramètres  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$ .

# Modèle de dégradation

- Processus Gamma *univarié*  $(Z_t)_{t \geq 0}$  de paramètres  $(a, b)$  :
  - ▶ processus de *Lévy positif* tel que

$$\gamma_0 = 0 \text{ et } \nu(dz) = a \frac{e^{-bz}}{z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z) dz,$$

- ▶  $Z_t$  suit la loi Gamma  $\Gamma(at, b)$  de densité

$$f_{at,b}(x) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

- Modèle de dégradation bivarié  $(X_t)_{t \geq 0}$  :
  - ▶ processus de *Lévy* sur  $\mathbb{R}_+^2$ ,
  - ▶ processus marginaux : processus *Gamma* de paramètres  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$ .

Un tel processus est appelé dans la suite processus *Gamma-Lévy* bivarié de paramètres marginaux  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$ .

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 **Etude théorique**
  - Le modèle stochastique
  - **Constructions de processus Gamma-Lévy bivariés**
  - Estimation des paramètres
  - Politique de maintenance préventive
- 3 Application aux données SNCF
- 4 Conclusion



# Première construction de $(X_t)_{t \geq 0}$ (réduction trivariée)

- $(Y_t^{(j)})_{t \geq 0}$  : processus Gamma indépendants de paramètres  $(\alpha_j, 1)$ .
- On pose :

$$\begin{cases} X_t^{(1)} = (Y_t^{(1)} + Y_t^{(3)}) / b_1 \\ X_t^{(2)} = (Y_t^{(2)} + Y_t^{(3)}) / b_2 \end{cases} \quad \text{où } b_1 > 0 \text{ et } b_2 > 0.$$

- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0} = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})_{t \geq 0}$  est alors un processus Gamma-Lévy de paramètres marginaux  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$ , avec

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_1 + \alpha_3, \\ a_2 = \alpha_2 + \alpha_3. \end{cases}$$

- On l'appelle processus *Gamma-Lévy* de type *TR* (TRGL).

# Première construction de $(X_t)_{t \geq 0}$ (réduction trivariée)

- $(Y_t^{(j)})_{t \geq 0}$  : processus Gamma indépendants de paramètres  $(\alpha_j, 1)$ .
- On pose :

$$\begin{cases} X_t^{(1)} = (Y_t^{(1)} + Y_t^{(3)}) / b_1 \\ X_t^{(2)} = (Y_t^{(2)} + Y_t^{(3)}) / b_2 \end{cases} \quad \text{où } b_1 > 0 \text{ et } b_2 > 0.$$

- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0} = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})_{t \geq 0}$  est alors un processus Gamma-Lévy de paramètres marginaux  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$ , avec

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_1 + \alpha_3, \\ a_2 = \alpha_2 + \alpha_3. \end{cases}$$

- On l'appelle processus *Gamma-Lévy* de type *TR* (TRGL).

# Première construction de $(X_t)_{t \geq 0}$ (réduction trivariée)

- $(Y_t^{(j)})_{t \geq 0}$  : processus Gamma indépendants de paramètres  $(\alpha_j, 1)$ .
- On pose :

$$\begin{cases} X_t^{(1)} = (Y_t^{(1)} + Y_t^{(3)}) / b_1 \\ X_t^{(2)} = (Y_t^{(2)} + Y_t^{(3)}) / b_2 \end{cases} \quad \text{où } b_1 > 0 \text{ et } b_2 > 0.$$

- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0} = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})_{t \geq 0}$  est alors un processus Gamma-Lévy de paramètres marginaux  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$ , avec

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_1 + \alpha_3, \\ a_2 = \alpha_2 + \alpha_3. \end{cases}$$

- On l'appelle processus *Gamma-Lévy* de type *TR* (TRGL).

# Première construction de $(X_t)_{t \geq 0}$ (réduction trivariée)

- $(Y_t^{(j)})_{t \geq 0}$  : processus Gamma indépendants de paramètres  $(\alpha_j, 1)$ .
- On pose :

$$\begin{cases} X_t^{(1)} = (Y_t^{(1)} + Y_t^{(3)}) / b_1 \\ X_t^{(2)} = (Y_t^{(2)} + Y_t^{(3)}) / b_2 \end{cases} \quad \text{où } b_1 > 0 \text{ et } b_2 > 0.$$

- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0} = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})_{t \geq 0}$  est alors un processus Gamma-Lévy de paramètres marginaux  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$ , avec

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_1 + \alpha_3, \\ a_2 = \alpha_2 + \alpha_3. \end{cases}$$

- On l'appelle processus *Gamma-Lévy* de type *TR* (TRGL).

# Paramétrisation d'un processus TRGL

- Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus TRGL construit avec les paramètres  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2)$ .
- Le coefficient de *corrélation linéaire* de  $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$  est :

$$\rho_{X_t} = \rho = \frac{\alpha_3}{\sqrt{a_1 a_2}}$$

et

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1 - \alpha_3 = a_1 - \rho \sqrt{a_1 a_2}, \\ \alpha_2 = a_2 - \alpha_3 = a_2 - \rho \sqrt{a_1 a_2}, \\ \alpha_3 = \rho \sqrt{a_1 a_2} \end{cases}$$

# Paramétrisation d'un processus TRGL

- Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus TRGL construit avec les paramètres  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2)$ .
- Le coefficient de *corrélation linéaire* de  $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$  est :

$$\rho_{X_t} = \rho = \frac{\alpha_3}{\sqrt{a_1 a_2}}$$

et

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1 - \alpha_3 = a_1 - \rho \sqrt{a_1 a_2}, \\ \alpha_2 = a_2 - \alpha_3 = a_2 - \rho \sqrt{a_1 a_2}, \\ \alpha_3 = \rho \sqrt{a_1 a_2} \end{cases}$$

# Paramétrisation d'un processus TRGL

- Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus TRGL construit avec les paramètres  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2)$ .
- Le coefficient de *corrélation linéaire* de  $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$  est :

$$\rho_{X_t} = \rho = \frac{\alpha_3}{\sqrt{a_1 a_2}}$$

et

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1 - \alpha_3 = a_1 - \rho \sqrt{a_1 a_2}, \\ \alpha_2 = a_2 - \alpha_3 = a_2 - \rho \sqrt{a_1 a_2}, \\ \alpha_3 = \rho \sqrt{a_1 a_2} \end{cases}$$

➡ on a donc deux paramétrisations équivalentes d'un processus TRGL :  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2)$  et  $(a_1, a_2, b_1, b_2, \rho)$ .

# Contrainte sur $\rho_X$ pour un processus TRGL

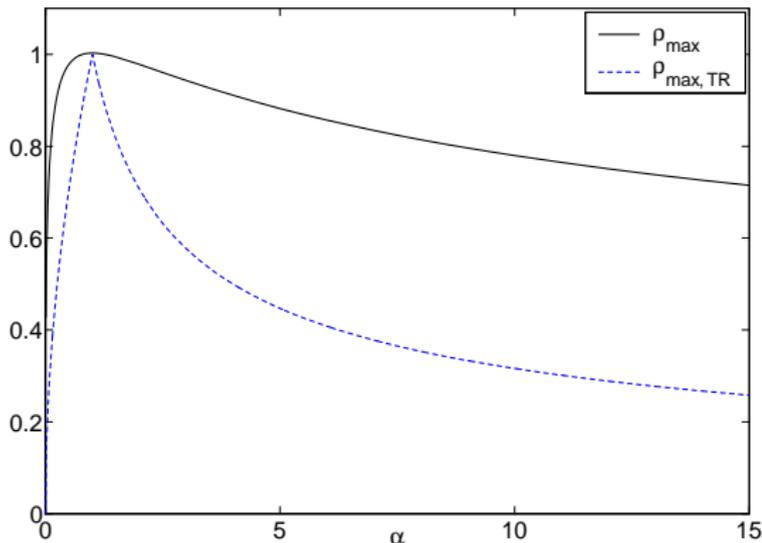
## Proposition

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus TRGL de paramètres marginaux  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$  et  $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$ . On a alors :  $\rho_X \leq \rho_{\max, TR}(\alpha) = \min\left(\sqrt{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) < \rho_{\max}(\alpha)$  pour  $\alpha \neq 1$ .

# Contrainte sur $\rho_X$ pour un processus TRGL

## Proposition

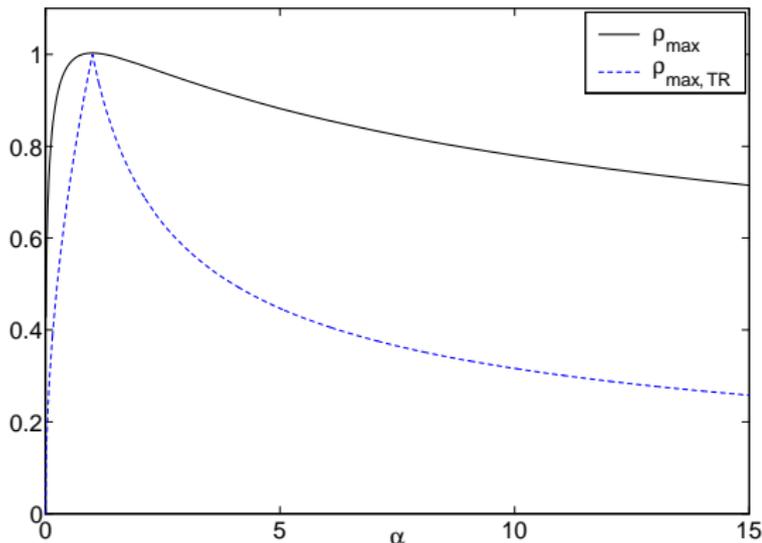
Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus TRGL de paramètres marginaux  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$  et  $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$ . On a alors :  $\rho_X \leq \rho_{\max, TR}(\alpha) = \min\left(\sqrt{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) < \rho_{\max}(\alpha)$  pour  $\alpha \neq 1$ .



# Contrainte sur $\rho_X$ pour un processus TRGL

## Proposition

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus **TRGL** de paramètres marginaux  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$  et  $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$ . On a alors :  $\rho_X \leq \rho_{\max, TR}(\alpha) = \min\left(\sqrt{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) < \rho_{\max}(\alpha)$  pour  $\alpha \neq 1$ .



➔ Un processus **TR Gamma-Lévy** ne permet donc **pas** de modéliser tout type de dépendance.

Mais : modèle **simple**, densité de  $X_t$  **connue**.

# Autres constructions

- Mesure de Lévy *paramétrique* :

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \tau) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \tau \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$$

où :

- ▶  $\tau \in [0, 1]$ ,
- ▶  $\mu_{\perp}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de l'*indépendance*,
- ▶  $\mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de la *complète dépendance*.

- *Copule* de Lévy :

- Pour ces deux modèles :

# Autres constructions

- Mesure de Lévy *paramétrique* :

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \tau) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \tau \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$$

où :

- ▶  $\tau \in [0, 1]$ ,
- ▶  $\mu_{\perp}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de l'*indépendance*,
- ▶  $\mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de la *complète dépendance*.

- *Copule* de Lévy :

- Pour ces deux modèles :

# Autres constructions

- Mesure de Lévy *paramétrique* :

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \tau) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \tau \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$$

où :

- ▶  $\tau \in [0, 1]$ ,
- ▶  $\mu_{\perp}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de l'*indépendance*,
- ▶  $\mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de la *complète dépendance*.

- *Copule* de Lévy :

- Pour ces deux modèles :

# Autres constructions

- Mesure de Lévy *paramétrique* :

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \tau) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \tau \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$$

où :

- ▶  $\tau \in [0, 1]$ ,
- ▶  $\mu_{\perp}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de l'*indépendance*,
- ▶  $\mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de la *complète dépendance*.

- *Copule* de Lévy :

- ▶ fonction  $F: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui permet de synthétiser la dépendance entre les processus marginaux,

*copule de Lévy* :  $\mu_{\perp} \otimes F \otimes \mu_{\perp}$  (pour  $\tau = 0$ )

- Pour ces deux modèles :

*copule de Lévy* :  $\mu_{\perp} \otimes F \otimes \mu_{\perp}$  (pour  $\tau = 0$ )

# Autres constructions

- Mesure de Lévy *paramétrique* :

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \tau) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \tau \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$$

où :

- ▶  $\tau \in [0, 1]$ ,
  - ▶  $\mu_{\perp}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de l'*indépendance*,
  - ▶  $\mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de la *complète dépendance*.
- *Copule* de Lévy :
    - ▶ fonction  $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui permet de synthétiser la *dépendance* entre les processus marginaux,
    - ▶ copule paramétrique : copule de Clayton-Lévy (un seul paramètre).
  - Pour ces deux modèles :

# Autres constructions

- Mesure de Lévy *paramétrique* :

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \tau) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \tau \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$$

où :

- ▶  $\tau \in [0, 1]$ ,
  - ▶  $\mu_{\perp}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de l'*indépendance*,
  - ▶  $\mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de la *complète dépendance*.
- *Copule* de Lévy :
    - ▶ fonction  $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui permet de synthétiser la *dépendance* entre les processus marginaux,
      - ▶ copule paramétrique : copule de Clayton-Lévy (un seul paramètre).
  - Pour ces deux modèles :

# Autres constructions

- Mesure de Lévy *paramétrique* :

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \tau) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \tau \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$$

où :

- ▶  $\tau \in [0, 1]$ ,
- ▶  $\mu_{\perp}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de l'*indépendance*,
- ▶  $\mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de la *complète dépendance*.
- *Copule* de Lévy :
  - ▶ fonction  $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui permet de synthétiser la *dépendance* entre les processus marginaux,
  - ▶ copule paramétrique : copule de Clayton-Lévy (un seul paramètre).
- Pour ces deux modèles :

▶ modélisation de tous les  $\rho_{xy}$  possibles.

# Autres constructions

- Mesure de Lévy *paramétrique* :

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \tau) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \tau \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$$

où :

- ▶  $\tau \in [0, 1]$ ,
  - ▶  $\mu_{\perp}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de l'*indépendance*,
  - ▶  $\mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de la *complète dépendance*.
- *Copule* de Lévy :
    - ▶ fonction  $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui permet de synthétiser la *dépendance* entre les processus marginaux,
    - ▶ copule paramétrique : copule de Clayton-Lévy (un seul paramètre).
  - Pour ces deux modèles :
    - ▶ modélisation de *tous* les  $\rho_X$  possibles,
    - ▶ densité de  $X_t$  *inconnue*.

# Autres constructions

- Mesure de Lévy *paramétrique* :

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \tau) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \tau \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$$

où :

- ▶  $\tau \in [0, 1]$ ,
  - ▶  $\mu_{\perp}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de l'*indépendance*,
  - ▶  $\mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de la *complète dépendance*.
- *Copule* de Lévy :
    - ▶ fonction  $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui permet de synthétiser la *dépendance* entre les processus marginaux,
    - ▶ copule paramétrique : copule de Clayton-Lévy (un seul paramètre).
  - Pour ces deux modèles :
    - ▶ modélisation de *tous* les  $\rho_X$  possibles,
    - ▶ densité de  $X_t$  *inconnue*.

# Autres constructions

- Mesure de Lévy *paramétrique* :

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \tau) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \tau \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$$

où :

- ▶  $\tau \in [0, 1]$ ,
  - ▶  $\mu_{\perp}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de l'*indépendance*,
  - ▶  $\mu_{\parallel}(dx_1, dx_2)$  est la mesure de Lévy correspondant au cas de la *complète dépendance*.
- *Copule* de Lévy :
    - ▶ fonction  $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui permet de synthétiser la *dépendance* entre les processus marginaux,
    - ▶ copule paramétrique : copule de Clayton-Lévy (un seul paramètre).
  - Pour ces deux modèles :
    - ▶ modélisation de *tous* les  $\rho_X$  possibles,
    - ▶ densité de  $X_t$  *inconnue*.

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 **Etude théorique**
  - Le modèle stochastique
  - Constructions de processus Gamma-Lévy bivariés
  - **Estimation des paramètres**
  - Politique de maintenance préventive
- 3 Application aux données SNCF
- 4 Conclusion



# Les données

Observations : une réalisation de

$$\left( \Delta t_j, \Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)} \right)_{1 \leq j \leq n}$$

où :

- $\Delta t_j$  = incrément de *temps*,
- $\Delta X_j^{(i)}$  = accroissement correspondant du processus  $\left( X_t^{(i)} \right)_{t \geq 0}$  ( $i = 1, 2$ ).

# Les données

Observations : une réalisation de

$$\left( \Delta t_j, \Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)} \right)_{1 \leq j \leq n}$$

où :

- $\Delta t_j$  = incrément de *temps*,
- $\Delta X_j^{(i)}$  = accroissement correspondant du processus  $\left( X_t^{(i)} \right)_{t \geq 0}$  ( $i = 1, 2$ ).

Remarques :

- Les  $\left( \Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)} \right)$  sont indépendants mais pas de même loi,
- $\Delta X_j^{(i)}$  suit la loi Gamma  $\Gamma(\alpha_i \Delta t_j, b_i)$  avec

$$\mathbb{E} \left( \Delta X_j^{(i)} \right) = \frac{a_i}{b_i} \Delta t_j, \quad \text{Var} \left( \Delta X_j^{(i)} \right) = \frac{a_i}{b_i^2} \Delta t_j,$$

- De plus :

$$\text{Cov} \left( \Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)} \right) = \rho \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{b_1 b_2} \Delta t_j.$$

# Estimateurs empiriques

On en déduit les *estimateurs empiriques* suivants :

- paramètres *marginaux* :

$$\frac{\hat{a}_i}{\hat{b}_i} = \frac{\sum_{j=1}^n \Delta X_j^{(i)}}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j},$$

$$\frac{\hat{a}_i}{\hat{b}_i^2} = \frac{\sum_{j=1}^n \left( \Delta X_j^{(i)} - \frac{\hat{a}_i}{\hat{b}_i} \Delta t_j \right)^2}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j} \sum_{j=1}^n (\Delta t_j)^2},$$

- coefficient de *corrélation linéaire* :

$$\hat{\rho} \frac{\sqrt{\hat{a}_1 \hat{a}_2}}{\hat{b}_1 \hat{b}_2} = \frac{\sum_{j=1}^n \left( \Delta X_j^{(1)} - \frac{\hat{a}_1}{\hat{b}_1} \Delta t_j \right) \left( \Delta X_j^{(2)} - \frac{\hat{a}_2}{\hat{b}_2} \Delta t_j \right)}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j} \sum_{j=1}^n (\Delta t_j)^2}.$$

# Estimateurs empiriques

On en déduit les *estimateurs empiriques* suivants :

- paramètres *marginaux* :

$$\frac{\hat{a}_i}{\hat{b}_i} = \frac{\sum_{j=1}^n \Delta X_j^{(i)}}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j},$$

$$\frac{\hat{a}_i}{\hat{b}_i^2} = \frac{\sum_{j=1}^n \left( \Delta X_j^{(i)} - \frac{\hat{a}_i}{\hat{b}_i} \Delta t_j \right)^2}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j} \sum_{j=1}^n (\Delta t_j)^2},$$

- coefficient de *corrélation linéaire* :

$$\hat{\rho} \frac{\sqrt{\hat{a}_1 \hat{a}_2}}{\hat{b}_1 \hat{b}_2} = \frac{\sum_{j=1}^n \left( \Delta X_j^{(1)} - \frac{\hat{a}_1}{\hat{b}_1} \Delta t_j \right) \left( \Delta X_j^{(2)} - \frac{\hat{a}_2}{\hat{b}_2} \Delta t_j \right)}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \Delta t_j} \sum_{j=1}^n (\Delta t_j)^2}.$$

# Estimateurs ML pour un processus TRGL

- Paramètres *marginiaux* ( $a_1, a_2, b_1, b_2$ ) : facile à estimer par maximum de vraisemblance univarié. On obtient  $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$ .
- Problème : comment estimer  $\rho$  ou  $\alpha_3$  ?
- La densité jointe de  $(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)})$  est :

# Estimateurs ML pour un processus TRGL

- Paramètres *marginaux* ( $a_1, a_2, b_1, b_2$ ) : facile à estimer par maximum de vraisemblance univarié. On obtient  $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$ .
- Problème : comment estimer  $\rho$  ou  $\alpha_3$  ?
- La densité jointe de  $(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)})$  est :

# Estimateurs ML pour un processus TRGL

- Paramètres *marginaux* ( $a_1, a_2, b_1, b_2$ ) : facile à estimer par maximum de vraisemblance univarié. On obtient  $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$ .
- Problème : comment estimer  $\rho$  ou  $\alpha_3$  ?
- La densité jointe de  $(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)})$  est :

$$g_{\Delta t_j}(x_1, x_2) = b_1 b_2 \int_0^{\min(b_1 x_1, b_2 x_2)} f_{\alpha_1 \Delta t_j, 1}(b_1 x_1 - x_3) f_{\alpha_2 \Delta t_j, 1}(b_2 x_2 - x_3) f_{\alpha_3 \Delta t_j, 1}(x_3) dx_3,$$

où  $f_{\alpha_i \Delta t_j, 1}$  est la densité de  $\Gamma(\alpha_i \Delta t_j, 1)$

# Estimateurs ML pour un processus TRGL

- Paramètres *marginiaux* ( $a_1, a_2, b_1, b_2$ ) : facile à estimer par maximum de vraisemblance univarié. On obtient  $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$ .
- Problème : comment estimer  $\rho$  ou  $\alpha_3$  ?
- La densité jointe de  $(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)})$  est :

$$g_{\Delta t_j}(x_1, x_2) = b_1 b_2 \int_0^{\min(b_1 x_1, b_2 x_2)} f_{\alpha_1 \Delta t_j, 1}(b_1 x_1 - x_3) f_{\alpha_2 \Delta t_j, 1}(b_2 x_2 - x_3) f_{\alpha_3 \Delta t_j, 1}(x_3) dx_3,$$

où  $f_{\alpha_i \Delta t_j, 1}$  est la densité de  $\Gamma(\alpha_i \Delta t_j, 1)$

→ la fonction de vraisemblance

$\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2) = \prod_{j=1}^n g_{\Delta t_j}(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)})$  est difficile à maximiser.

# Estimateurs ML pour un processus TRGL

- Paramètres *marginiaux*  $(a_1, a_2, b_1, b_2)$  : facile à estimer par maximum de vraisemblance univarié. On obtient  $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$ .
- Problème : comment estimer  $\rho$  ou  $\alpha_3$  ?
- La densité jointe de  $(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)})$  est :

$$g_{\Delta t_j}(x_1, x_2) = b_1 b_2 \int_0^{\min(b_1 x_1, b_2 x_2)} f_{\alpha_1 \Delta t_j, 1}(b_1 x_1 - x_3) f_{\alpha_2 \Delta t_j, 1}(b_2 x_2 - x_3) f_{\alpha_3 \Delta t_j, 1}(x_3) dx_3,$$

où  $f_{\alpha_i \Delta t_j, 1}$  est la densité de  $\Gamma(\alpha_i \Delta t_j, 1)$

→ la fonction de vraisemblance

$\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2) = \prod_{j=1}^n g_{\Delta t_j}(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)})$  est difficile à maximiser.

- On considère  $(\Delta Y_j^{(3)})_{1 \leq j \leq n}$  comme des *données cachées* et on utilise un algorithme **EM**.

# Estimateurs ML pour un processus TRGL

- Paramètres *marginiaux*  $(a_1, a_2, b_1, b_2)$  : facile à estimer par maximum de vraisemblance univarié. On obtient  $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$ .
- Problème : comment estimer  $\rho$  ou  $\alpha_3$  ?
- La densité jointe de  $(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)})$  est :

$$g_{\Delta t_j}(x_1, x_2) = b_1 b_2 \int_0^{\min(b_1 x_1, b_2 x_2)} f_{\alpha_1 \Delta t_j, 1}(b_1 x_1 - x_3) f_{\alpha_2 \Delta t_j, 1}(b_2 x_2 - x_3) f_{\alpha_3 \Delta t_j, 1}(x_3) dx_3,$$

où  $f_{\alpha_i \Delta t_j, 1}$  est la densité de  $\Gamma(\alpha_i \Delta t_j, 1)$

→ la fonction de vraisemblance

$\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2) = \prod_{j=1}^n g_{\Delta t_j}(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)})$  est difficile à maximiser.

- On considère  $(\Delta Y_j^{(3)})_{1 \leq j \leq n}$  comme des *données cachées* et on utilise un algorithme EM.
- On n'a pas réussi à estimer tous les paramètres  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2)$

# Estimateurs ML pour un processus TRGL

- Paramètres *marginiaux*  $(a_1, a_2, b_1, b_2)$  : facile à estimer par maximum de vraisemblance univarié. On obtient  $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$ .
- Problème : comment estimer  $\rho$  ou  $\alpha_3$  ?
- La densité jointe de  $(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)})$  est :

$$g_{\Delta t_j}(x_1, x_2) = b_1 b_2 \int_0^{\min(b_1 x_1, b_2 x_2)} f_{\alpha_1 \Delta t_j, 1}(b_1 x_1 - x_3) f_{\alpha_2 \Delta t_j, 1}(b_2 x_2 - x_3) f_{\alpha_3 \Delta t_j, 1}(x_3) dx_3,$$

où  $f_{\alpha_i \Delta t_j, 1}$  est la densité de  $\Gamma(\alpha_i \Delta t_j, 1)$

→ la fonction de vraisemblance

$\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2) = \prod_{j=1}^n g_{\Delta t_j}(\Delta X_j^{(1)}, \Delta X_j^{(2)})$  est difficile à maximiser.

- On considère  $(\Delta Y_j^{(3)})_{1 \leq j \leq n}$  comme des *données cachées* et on utilise un algorithme **EM**.
- On n'a pas réussi à estimer tous les paramètres  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1, b_2)$  → deux possibilités :
  - ▶ on garde  $(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$  et on utilise un algorithme **EM** pour  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,
  - ▶ on garde  $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$  et on utilise un algorithme **EM** uniquement pour  $\alpha_3$ .

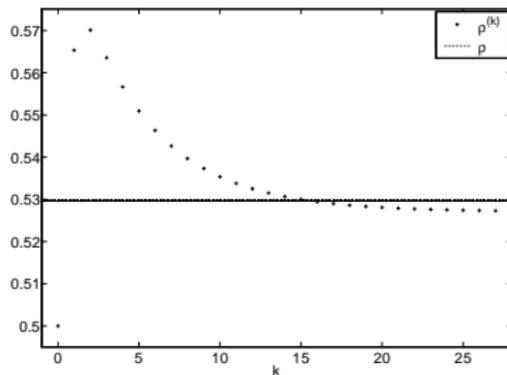
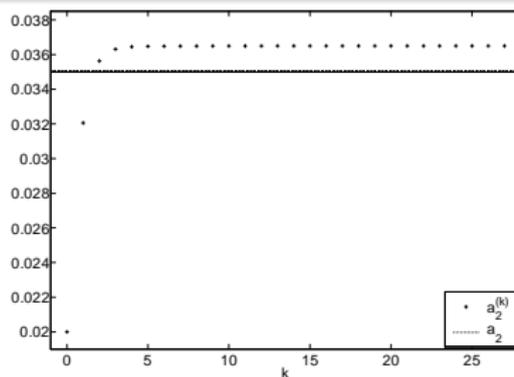
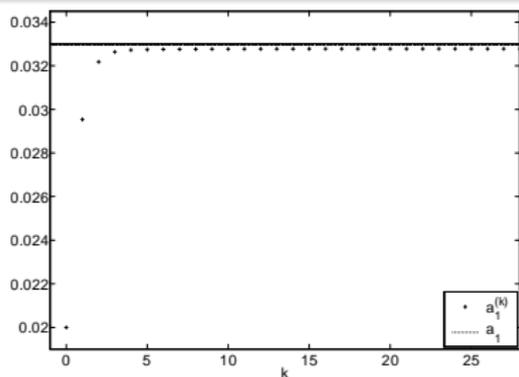
## Résultats sur 500 données simulées

	Vraies valeurs	Estimations empiriques	Estimations ML univariées	Algorithme EM	
				EM1	EM2
$a_1$	0.0330	0.0348	0.0342	0.0347	—
$b_1$	13.5	14.38	14.14	—	—
$a_2$	0.0350	0.0362	0.0357	0.0354	—
$b_2$	20	20.58	20.25	—	—
$\rho$	0.5296	0.5637	—	0.5231	0.5214

**EM1** = EM estimation de  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,

**EM2** = EM estimation de  $\alpha_3$ .

# Evolution des paramètres dans l'algorithme EM1



# Plan de l'exposé

## 1 Introduction

## 2 Etude théorique

- Le modèle stochastique
- Constructions de processus Gamma-Lévy bivariés
- Estimation des paramètres
- Politique de maintenance préventive

## 3 Application aux données SNCF

## 4 Conclusion



# Le problème

- $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$  : indicateur de détérioration d'un système modélisé par un processus Gamma-Lévy bivarié,
- $s_j$  = seuil (correctif) pour  $X_t^{(j)}$  au-delà duquel le système est inutilisable ( $j = 1, 2$ ),
- L'état du système  $X_t$  est observé lors d'*inspections instantanées parfaites*.
- Lors d'une inspection :

# Le problème

- $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$  : indicateur de détérioration d'un système modélisé par un processus Gamma-Lévy bivarié,
- $s_i$  = seuil (correctif) pour  $X_t^{(i)}$  au-delà duquel le système est inutilisable ( $i = 1, 2$ ),
- L'état du système  $X_t$  est observé lors d'*inspections instantanées parfaites*.
- Lors d'une inspection :

# Le problème

- $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$  : indicateur de détérioration d'un système modélisé par un processus Gamma-Lévy bivarié,
- $s_i$  = seuil (correctif) pour  $X_t^{(i)}$  au-delà duquel le système est inutilisable ( $i = 1, 2$ ),
- L'état du système  $X_t$  est observé lors d'*inspections instantanées parfaites*.
- Lors d'une inspection :
  - si  $X_t^{(1)}$  ou  $X_t^{(2)}$  est au-delà de  $s_1$  ou  $s_2$ , une action CM est effectuée.

# Le problème

- $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$  : indicateur de détérioration d'un système modélisé par un processus Gamma-Lévy bivarié,
- $s_i$  = seuil (correctif) pour  $X_t^{(i)}$  au-delà duquel le système est inutilisable ( $i = 1, 2$ ),
- L'état du système  $X_t$  est observé lors d'*inspections instantanées parfaites*.
- Lors d'une inspection :
  - ▶ si  $X_t^{(1)}$  ou  $X_t^{(2)}$  est au-delà de  $s_1$  ou  $s_2$ , une action CM est effectuée,
  - ▶ partant d'une observation  $(x_1, x_2)$  de  $(X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$  telle que  $x_i < s_i$ , il s'agit de déterminer la date de la prochaine maintenance de telle sorte que ni  $X_t^{(1)}$  ni  $X_t^{(2)}$  n'excède  $s_1$  et  $s_2$  avant cette date avec une grande probabilité.

# Le problème

- $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$  : indicateur de détérioration d'un système modélisé par un processus Gamma-Lévy bivarié,
- $s_i$  = seuil (correctif) pour  $X_t^{(i)}$  au-delà duquel le système est inutilisable ( $i = 1, 2$ ),
- L'état du système  $X_t$  est observé lors d'*inspections instantanées parfaites*.
- Lors d'une inspection :
  - ▶ si  $X_t^{(1)}$  ou  $X_t^{(2)}$  est au-delà de  $s_1$  ou  $s_2$ , une action CM est effectuée,
  - ▶ partant d'une observation  $(x_1, x_2)$  de  $(X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$  telle que  $x_i < s_i$ , il s'agit de déterminer la date de la prochaine maintenance de telle sorte que ni  $X_t^{(1)}$  ni  $X_t^{(2)}$  n'excède  $s_1$  et  $s_2$  avant cette date avec une grande probabilité.

# Le problème

- $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$  : indicateur de détérioration d'un système modélisé par un processus Gamma-Lévy bivarié,
- $s_i$  = seuil (correctif) pour  $X_t^{(i)}$  au-delà duquel le système est inutilisable ( $i = 1, 2$ ),
- L'état du système  $X_t$  est observé lors d'*inspections instantanées parfaites*.
- Lors d'une inspection :
  - ▶ si  $X_t^{(1)}$  ou  $X_t^{(2)}$  est au-delà de  $s_1$  ou  $s_2$ , une action CM est effectuée,
  - ▶ partant d'une observation  $(x_1, x_2)$  de  $(X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$  telle que  $x_i < s_i$ , il s'agit de déterminer la date de la prochaine maintenance de telle sorte que ni  $X_t^{(1)}$  ni  $X_t^{(2)}$  n'excède  $s_1$  et  $s_2$  avant cette date avec une grande probabilité.

# Le cas univarié

- Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$  un niveau de *confiance* et, pour  $i = 1, 2$  :
  - ▶  $x_i$  = niveau de dégradation observé à l'instant  $t = 0$  (par exemple), avec  $0 < x_i < s_i$ ,
  - ▶ soit  $\mathcal{T}^{(i)}$  le temps d'atteinte de  $s_i$  pour  $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$ , où

$$\mathcal{T}^{(i)} = \inf \left( t > 0 : X_t^{(i)} \geq s_i \right).$$

- L'instant de la prochaine maintenance  $\tau^{(i)}$  associé à  $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$  vérifie :

$$\mathbb{P}_{x_i} \left( \mathcal{T}^{(i)} > \tau^{(i)} \right) = 1 - \varepsilon,$$

ou, de manière équivalente :

$$\mathbb{P}_{x_i} \left( X_{\tau^{(i)}}^{(i)} < s_i \right) = \mathbb{P}_0 \left( X_{\tau^{(i)}}^{(i)} < s_i - x_i \right) = F_{a^{(i)}\tau^{(i)}, b^{(i)}} \left( s_i - x_i \right) = 1 - \varepsilon,$$

où  $F_{a^{(i)}\tau^{(i)}, b^{(i)}}$  est la fonction de répartition de  $\Gamma \left( a^{(i)}\tau^{(i)}, b^{(i)} \right)$ .

# Le cas univarié

- Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$  un niveau de *confiance* et, pour  $i = 1, 2$  :
  - ▶  $x_i$  = niveau de dégradation observé à l'instant  $t = 0$  (par exemple), avec  $0 < x_i < s_i$ ,
  - ▶ soit  $\mathcal{T}^{(i)}$  le temps d'atteinte de  $s_i$  pour  $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$ , où

$$\mathcal{T}^{(i)} = \inf \left( t > 0 : X_t^{(i)} \geq s_i \right).$$

- L'instant de la prochaine maintenance  $\tau^{(i)}$  associé à  $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$  vérifie :

$$\mathbb{P}_{x_i} \left( \mathcal{T}^{(i)} > \tau^{(i)} \right) = 1 - \varepsilon,$$

ou, de manière équivalente :

$$\mathbb{P}_{x_i} \left( X_{\tau^{(i)}}^{(i)} < s_i \right) = \mathbb{P}_0 \left( X_{\tau^{(i)}}^{(i)} < s_i - x_i \right) = F_{a^{(i)}\tau^{(i)}, b^{(i)}} \left( s_i - x_i \right) = 1 - \varepsilon,$$

où  $F_{a^{(i)}\tau^{(i)}, b^{(i)}}$  est la fonction de répartition de  $\Gamma \left( a^{(i)}\tau^{(i)}, b^{(i)} \right)$ .

# Le cas univarié

- Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$  un niveau de *confiance* et, pour  $i = 1, 2$  :
  - ▶  $x_i$  = niveau de dégradation observé à l'instant  $t = 0$  (par exemple), avec  $0 < x_i < s_i$ ,
  - ▶ soit  $\mathcal{T}^{(i)}$  le temps d'atteinte de  $s_i$  pour  $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$ , où

$$\mathcal{T}^{(i)} = \inf \left( t > 0 : X_t^{(i)} \geq s_i \right).$$

- L'instant de la prochaine maintenance  $\tau^{(i)}$  associé à  $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$  vérifie :

$$\mathbb{P}_{x_i} \left( \mathcal{T}^{(i)} > \tau^{(i)} \right) = 1 - \varepsilon,$$

ou, de manière équivalente :

$$\mathbb{P}_{x_i} \left( X_{\tau^{(i)}}^{(i)} < s_i \right) = \mathbb{P}_0 \left( X_{\tau^{(i)}}^{(i)} < s_i - x_i \right) = F_{a^{(i)}\tau^{(i)}, b^{(i)}} \left( s_i - x_i \right) = 1 - \varepsilon,$$

où  $F_{a^{(i)}\tau^{(i)}, b^{(i)}}$  est la fonction de répartition de  $\Gamma \left( a^{(i)}\tau^{(i)}, b^{(i)} \right)$ .

# Le cas univarié

- Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$  un niveau de *confiance* et, pour  $i = 1, 2$  :
  - ▶  $x_i$  = niveau de dégradation observé à l'instant  $t = 0$  (par exemple), avec  $0 < x_i < s_i$ ,
  - ▶ soit  $\mathcal{T}^{(i)}$  le temps d'atteinte de  $s_i$  pour  $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$ , où

$$\mathcal{T}^{(i)} = \inf \left( t > 0 : X_t^{(i)} \geq s_i \right).$$

- L'instant de la prochaine maintenance  $\tau^{(i)}$  associé à  $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$  vérifie :

$$\mathbb{P}_{x_i} \left( \mathcal{T}^{(i)} > \tau^{(i)} \right) = 1 - \varepsilon,$$

ou, de manière équivalente :

$$\mathbb{P}_{x_i} \left( X_{\tau^{(i)}}^{(i)} < s_i \right) = \mathbb{P}_0 \left( X_{\tau^{(i)}}^{(i)} < s_i - x_i \right) = F_{a^{(i)\tau^{(i)}}, b^{(i)}} \left( s_i - x_i \right) = 1 - \varepsilon,$$

où  $F_{a^{(i)\tau^{(i)}}, b^{(i)}}$  est la fonction de répartition de  $\Gamma \left( a^{(i)\tau^{(i)}}, b^{(i)} \right)$ .

# Le cas bivarié

- Si la corrélation entre  $(X_t^{(1)})_{t \geq 0}$  et  $(X_t^{(2)})_{t \geq 0}$  est inconnue, une date naturelle de maintenance est :

$$\tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}).$$

- En utilisant un modèle bivarié, la date de maintenance  $\tau^B$  vérifie :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(x_1, x_2)} \left( T^{(1)} > \tau^B, T^{(2)} > \tau^B \right) \\ &= \mathbb{P}_{(0,0)} \left( X_{\tau^B}^{(1)} < s_1 - x_1, X_{\tau^B}^{(2)} < s_2 - x_2 \right) \\ &= 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

# Le cas bivarié

- Si la corrélation entre  $(X_t^{(1)})_{t \geq 0}$  et  $(X_t^{(2)})_{t \geq 0}$  est inconnue, une date naturelle de maintenance est :

$$\tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}).$$

- En utilisant un modèle bivarié, la date de maintenance  $\tau^B$  vérifie :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(x_1, x_2)} \left( T^{(1)} > \tau^B, T^{(2)} > \tau^B \right) \\ &= \mathbb{P}_{(0,0)} \left( X_{\tau^B}^{(1)} < s_1 - x_1, X_{\tau^B}^{(2)} < s_2 - x_2 \right) \\ &= 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

# Le cas bivarié

- Si la corrélation entre  $(X_t^{(1)})_{t \geq 0}$  et  $(X_t^{(2)})_{t \geq 0}$  est inconnue, une date naturelle de maintenance est :

$$\tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}).$$

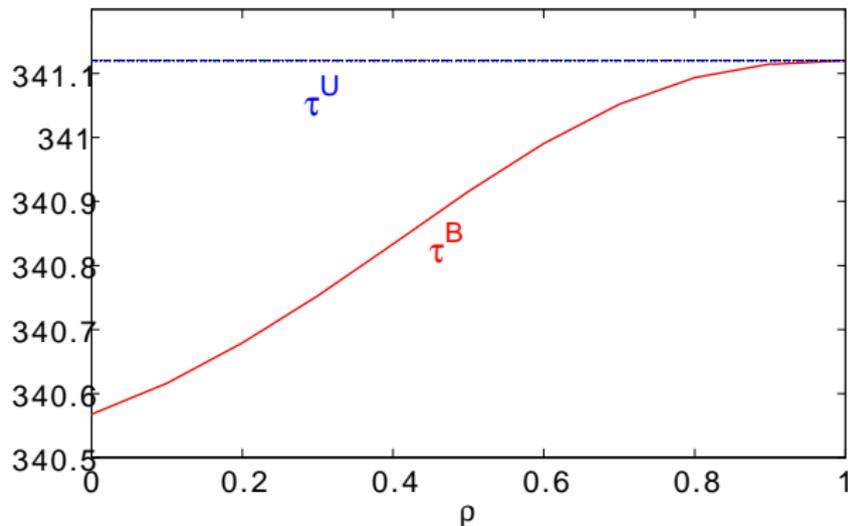
- En utilisant un modèle bivarié, la date de maintenance  $\tau^B$  vérifie :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(x_1, x_2)} \left( T^{(1)} > \tau^B, T^{(2)} > \tau^B \right) \\ &= \mathbb{P}_{(0,0)} \left( X_{\tau^B}^{(1)} < s_1 - x_1, X_{\tau^B}^{(2)} < s_2 - x_2 \right) \\ &= 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

➡ le but est de comparer  $\tau^U$  et  $\tau^B$ , et de comprendre l'influence de la dépendance entre les deux indicateurs sur  $\tau^B$ .

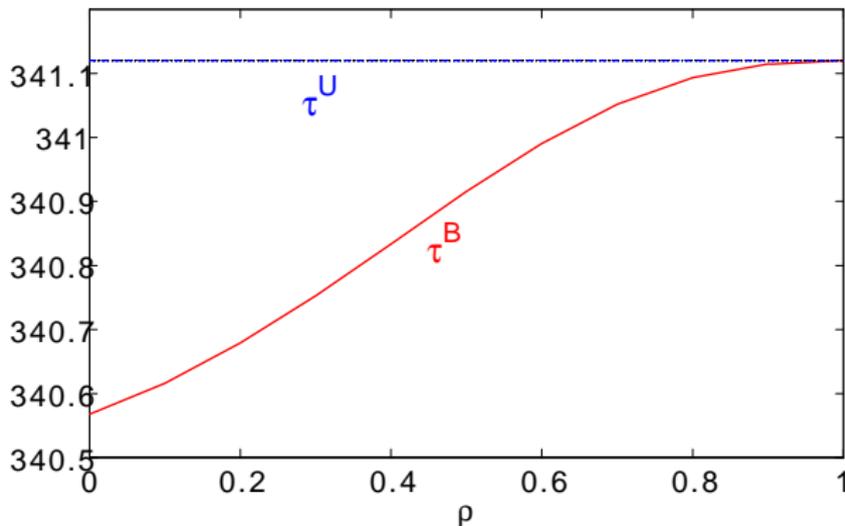
# Exemple 1 (processus TRGL)

$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$\rho_{\max}$	$\tau^{(1)}$	$\tau^{(2)}$	$\tau^U$	$\tau^B(\rho_{\max})$
0.03	20	0.03	30	0.2	0.2	1	1	1	341.12	558.31	341.12	341.12



# Exemple 1 (processus TRGL)

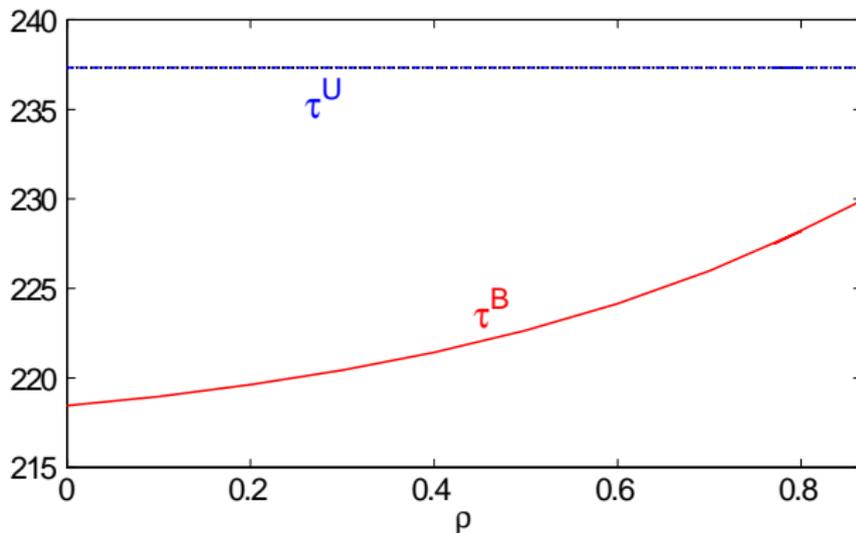
$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$\rho_{\max}$	$\tau^{(1)}$	$\tau^{(2)}$	$\tau^U$	$\tau^B(\rho_{\max})$
0.03	20	0.03	30	0.2	0.2	1	1	1	341.12	558.31	341.12	341.12



1.  $\tau^B \leq \tau^U$ ; 2.  $\tau^B$  croît avec  $\rho$ ; 3.  $\tau^B(\rho_{\max}) = \tau^U$ .

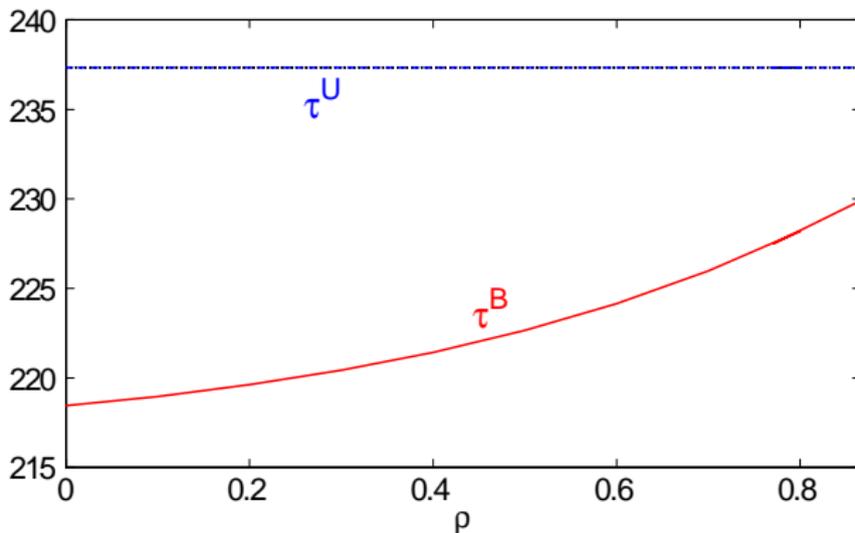
## Example 2 (processus TRGL)

$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$\rho_{\max}$	$\tau^{(1)}$	$\tau^{(2)}$	$\tau^U$	$\tau^B(\rho_{\max})$
0.03	20	0.04	20	0.4	0.2	1	1	0.866	237.33	255.84	237.33	229.91



## Exemple 2 (processus TRGL)

$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$\rho_{\max}$	$\tau^{(1)}$	$\tau^{(2)}$	$\tau^U$	$\tau^B(\rho_{\max})$
0.03	20	0.04	20	0.4	0.2	1	1	0.866	237.33	255.84	237.33	229.91



- $\tau^B \leq \tau^U$ ;
- $\tau^B$  croît avec  $\rho$ ;
- $\tau^B(\rho_{\max}) < \tau^U$ .

# Influence de la dépendance

## Proposition

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus Gamma-Lévy de paramètres marginaux  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$  et de copule de Lévy  $F$ . Alors :

- 1  $\tau^B$  est une fonction croissante de  $F$  au sens où, si  $F \leq \tilde{F}$  et si les marginales sont fixées, alors  $\tau^B \leq \tilde{\tau}^B$ . De plus :

$$\tau^\perp \leq \tau^B \leq \tau^\parallel \leq \tau^U.$$

- 2 Si  $a_1 = a_2$ , alors  $\tau^\parallel = \tau^U$ .
- 3 Si  $a_1 < a_2$ , les cas  $\tau^\parallel < \tau^U$  et  $\tau^\parallel = \tau^U$  sont tous les deux possibles.

Remarque : pour un processus TRGL, on a

$$F(u_1, u_2) = \rho \min\left(u_1 \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, u_2 \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\right) \text{ pour tout } (u_1, u_2) \in \mathbb{R}_+^2.$$

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Etude théorique
- 3 Application aux données SNCF**
- 4 Conclusion



# Modélisation de la dégradation

- Deux indicateurs (NL et NT) pour mesurer les défauts de nivellement de la voie ferrée.
- Pour le moment :
  - NL est modélisé par un processus Gamma univarié, dont les paramètres ont été estimés,  
le défaut de la production multivariée est modélisé conjointement par l'extension de NL, et sera évalué.
- A notre disposition :
  - un modèle multivarié de NL et NT, basé sur les données de la LGV Thalys.

# Modélisation de la dégradation

- Deux indicateurs (NL et NT) pour mesurer les défauts de nivellement de la voie ferrée.
- Pour le moment :
  - ▶ NL est modélisé par un processus Gamma *univarié*, dont les paramètres ont été estimés,
  - ▶ la date de la prochaine maintenance est basée uniquement sur l'observation de NL ( $\tau = \tau^{(1)}$ ).
- A notre disposition :
  - ▶ un jeu de 10 000 observations de NL et NT sur une période de 10 ans de la LGV Nord-Picardie.

# Modélisation de la dégradation

- Deux indicateurs (NL et NT) pour mesurer les défauts de nivellement de la voie ferrée.
- Pour le moment :
  - ▶ NL est modélisé par un processus Gamma *univarié*, dont les paramètres ont été estimés,
  - ▶ la date de la prochaine maintenance est basée uniquement sur l'observation de NL ( $\tau = \tau^{(1)}$ ).
- A notre disposition :

un processus Gamma bivarié pour modéliser les deux indicateurs NL et NT  
des lois de durée conditionnelles

# Modélisation de la dégradation

- Deux indicateurs (NL et NT) pour mesurer les défauts de nivellement de la voie ferrée.
- Pour le moment :
  - ▶ NL est modélisé par un processus Gamma *univarié*, dont les paramètres ont été estimés,
  - ▶ la date de la prochaine maintenance est basée uniquement sur l'observation de NL ( $\tau = \tau^{(1)}$ ).
- A notre disposition :
  - ▶ environ 10 000 données pour les accroissements de (NL, NT) sur une portion de la LGV Paris-Lyon

# Modélisation de la dégradation

- Deux indicateurs (NL et NT) pour mesurer les défauts de nivellement de la voie ferrée.
- Pour le moment :
  - ▶ NL est modélisé par un processus Gamma *univarié*, dont les paramètres ont été estimés,
  - ▶ la date de la prochaine maintenance est basée uniquement sur l'observation de NL ( $\tau = \tau^{(1)}$ ).
- A notre disposition :
  - ▶ environ 10 000 données pour les accroissements de (NL, NT) sur une portion de la LGV Paris-Lyon

# Modélisation de la dégradation

- Deux indicateurs (NL et NT) pour mesurer les défauts de nivellement de la voie ferrée.
- Pour le moment :
  - ▶ NL est modélisé par un processus Gamma *univarié*, dont les paramètres ont été estimés,
  - ▶ la date de la prochaine maintenance est basée uniquement sur l'observation de NL ( $\tau = \tau^{(1)}$ ).
- A notre disposition :
  - ▶ environ 10 000 données pour les accroissements de (NL, NT) sur une portion de la LGV Paris-Lyon

# Modélisation de la dégradation

- Deux indicateurs (NL et NT) pour mesurer les défauts de nivellement de la voie ferrée.
- Pour le moment :
  - ▶ NL est modélisé par un processus Gamma *univarié*, dont les paramètres ont été estimés,
  - ▶ la date de la prochaine maintenance est basée uniquement sur l'observation de NL ( $\tau = \tau^{(1)}$ ).
- A notre disposition :
  - ▶ environ 10 000 données pour les accroissements de (NL, NT) sur une portion de la LGV Paris-Lyon  (NL, NT) est modélisé par un processus *TRGL*.

# Modélisation de la dégradation

- Deux indicateurs (NL et NT) pour mesurer les défauts de nivellement de la voie ferrée.
- Pour le moment :
  - ▶ NL est modélisé par un processus Gamma *univarié*, dont les paramètres ont été estimés,
  - ▶ la date de la prochaine maintenance est basée uniquement sur l'observation de NL ( $\tau = \tau^{(1)}$ ).
- A notre disposition :
  - ▶ environ 10 000 données pour les accroissements de (NL, NT) sur une portion de la LGV Paris-Lyon  (NL, NT) est modélisé par un processus TRGL.
- On obtient :

$$\hat{a}_1 = 0.0355; \hat{b}_1 = 19.19$$

$$\hat{a}_2 = 0.0387; \hat{b}_2 = 29.72$$

$$\hat{\rho} = 0.5262.$$

# Modélisation de la dégradation

- Deux indicateurs (**NL** et **NT**) pour mesurer les défauts de nivellement de la voie ferrée.
- Pour le moment :
  - ▶ **NL** est modélisé par un processus Gamma *univarié*, dont les paramètres ont été estimés,
  - ▶ la date de la prochaine maintenance est basée uniquement sur l'observation de **NL** ( $\tau = \tau^{(1)}$ ).
- A notre disposition :
  - ▶ environ 10 000 données pour les accroissements de (**NL**, **NT**) sur une portion de la LGV Paris-Lyon  (**NL**, **NT**) est modélisé par un processus *TRGL*.
- On obtient :

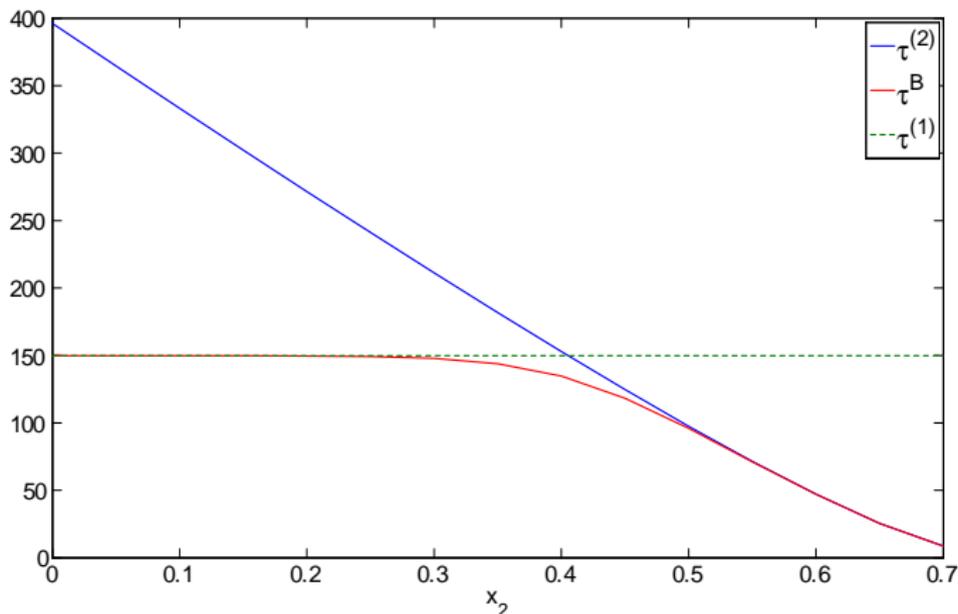
$$\hat{a}_1 = 0.0355; \hat{b}_1 = 19.19$$

$$\hat{a}_2 = 0.0387; \hat{b}_2 = 29.72$$

$$\hat{\rho} = 0.5262.$$

- Seuils correctifs usuels :  $s_1 = 0.9$  pour **NL**;  $s_2 = 0.75$  pour **NT**.

# $\tau^{(1)}$ , $\tau^{(2)}$ et $\tau^B$ en fonction de $x_2$ pour $x_1 = 0.4$



$x_2$	$\tau^{(1)}$	$\tau^{(2)}$	$\tau^U$	$\tau^B$	$\tau^{(1)} - \tau^B$	$\tau^U - \tau^B$
0.4	150	150	150	134.7	15.3	15.3
0.5	150	97.5	97.5	95.9	54.1	1.6
0.6	150	47.2	47.2	47.1	102.9	0.1

# Conclusion pour la maintenance d'une voie ferrée

Si on observe que  $(NL, NT) = (x_1, x_2)$  :

- Si  $x_2 > x_1$  : prendre  $\tau^{(1)}$  à la place de  $\tau^B$  peut mener à un grand délai pour l'action de maintenance,
- Si  $x_1$  n'est pas trop proche de  $x_2$ , la valeur  $\tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$  est acceptable pour le planning de la maintenance,
- Si  $x_1$  est proche de  $x_2$ , on a  $\tau^B \lesssim \tau^U$  et prendre  $\tau^U$  à la place de  $\tau^B$  peut amener un délai dans la maintenance mais est cependant raisonnable.

# Conclusion pour la maintenance d'une voie ferrée

Si on observe que  $(NL, NT) = (x_1, x_2)$  :

- Si  $x_2 > x_1$  : prendre  $\tau^{(1)}$  à la place de  $\tau^B$  peut mener à un grand délai pour l'action de maintenance,
- Si  $x_1$  n'est pas trop proche de  $x_2$ , la valeur  $\tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$  est acceptable pour le planning de la maintenance,
- Si  $x_1$  est proche de  $x_2$ , on a  $\tau^B \lesssim \tau^U$  et prendre  $\tau^U$  à la place de  $\tau^B$  peut amener un délai dans la maintenance mais est cependant raisonnable.

# Conclusion pour la maintenance d'une voie ferrée

Si on observe que  $(NL, NT) = (x_1, x_2)$  :

- Si  $x_2 > x_1$  : prendre  $\tau^{(1)}$  à la place de  $\tau^B$  peut mener à un grand délai pour l'action de maintenance,
- Si  $x_1$  n'est pas trop proche de  $x_2$ , la valeur  $\tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$  est acceptable pour le planning de la maintenance,
- Si  $x_1$  est proche de  $x_2$ , on a  $\tau^B \lesssim \tau^U$  et prendre  $\tau^U$  à la place de  $\tau^B$  peut amener un délai dans la maintenance mais est cependant raisonnable.

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Etude théorique
- 3 Application aux données SNCF
- 4 Conclusion**



# Conclusion

- La prise en compte de la dépendance *rapproche* la date de la prochaine maintenance ( $\tau^B \leq \tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$ )

# Conclusion

- La prise en compte de la dépendance *rapproche* la date de la prochaine maintenance ( $\tau^B \leq \tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$ )  résultats plus sûrs.

# Conclusion

- La prise en compte de la dépendance *rapproche* la date de la prochaine maintenance ( $\tau^B \leq \tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$ )  résultats plus sûrs.
- La date de la prochaine maintenance *croît* avec la dépendance ( $\tau^B$  croît avec  $\rho$ ):
  - ▶ moins les indicateurs sont dépendants, plus la différence entre  $\tau^U$  et  $\tau^B$  est grande, et moins c'est sûr de prendre  $\tau^U$  à la place de  $\tau^B$ ,
  - ▶ en cas de corrélation inconnue :

→ choisir  $\tau^B$  (cas de l'indépendance) est l'attitude la plus sûre, où

$$\begin{aligned} P_{(X_1, X_2)}(\tau^{(1)} > \tau^{B-1}, \tau^{(2)} > \tau^{B-1}) \\ &= P_{X_1}(\tau^{(1)} > \tau^{B-1}) P_{X_2}(\tau^{(2)} > \tau^{B-1}) \\ &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

→ en cas de corrélation inconnue, choisir  $\tau^B$  est la plus sûre attitude

# Conclusion

- La prise en compte de la dépendance *rapproche* la date de la prochaine maintenance ( $\tau^B \leq \tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$ )  résultats plus sûrs.
- La date de la prochaine maintenance *croît* avec la dépendance ( $\tau^B$  croît avec  $\rho$ ):
  - ▶ moins les indicateurs sont dépendants, plus la différence entre  $\tau^U$  et  $\tau^B$  est grande, et moins c'est sûr de prendre  $\tau^U$  à la place de  $\tau^B$ ,
  - ▶ en cas de corrélation inconnue :
    - ▶ choisir  $\tau^{B,\perp}$  (cas de l'indépendance) est l'attitude la plus sûre, où

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(X_1, X_2)} \left( T^{(1)} > \tau^{B,\perp}, T^{(2)} > \tau^{B,\perp} \right) \\ &= \mathbb{P}_{X_1} \left( T^{(1)} > \tau^{B,\perp} \right) \mathbb{P}_{X_2} \left( T^{(2)} > \tau^{B,\perp} \right) \\ &= 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

- ▶ prendre  $\tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$  n'est pas sûr du tout !

# Conclusion

- La prise en compte de la dépendance *rapproche* la date de la prochaine maintenance ( $\tau^B \leq \tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$ )  résultats plus sûrs.
- La date de la prochaine maintenance *croît* avec la dépendance ( $\tau^B$  croît avec  $\rho$ ):
  - ▶ moins les indicateurs sont dépendants, plus la différence entre  $\tau^U$  et  $\tau^B$  est grande, et moins c'est sûr de prendre  $\tau^U$  à la place de  $\tau^B$ ,
  - ▶ en cas de corrélation inconnue :
    - ▶ choisir  $\tau^{B,\perp}$  (cas de l'indépendance) est l'attitude la plus sûre, où

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(x_1, x_2)} \left( T^{(1)} > \tau^{B,\perp}, T^{(2)} > \tau^{B,\perp} \right) \\ &= \mathbb{P}_{x_1} \left( T^{(1)} > \tau^{B,\perp} \right) \mathbb{P}_{x_2} \left( T^{(2)} > \tau^{B,\perp} \right) \\ &= 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

- ▶ prendre  $\tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$  n'est pas sûr du tout !

# Conclusion

- La prise en compte de la dépendance *rapproche* la date de la prochaine maintenance ( $\tau^B \leq \tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$ )  résultats plus sûrs.
- La date de la prochaine maintenance *croît* avec la dépendance ( $\tau^B$  croît avec  $\rho$ ):
  - ▶ moins les indicateurs sont dépendants, plus la différence entre  $\tau^U$  et  $\tau^B$  est grande, et moins c'est sûr de prendre  $\tau^U$  à la place de  $\tau^B$ ,
  - ▶ en cas de corrélation inconnue :
    - ▶ choisir  $\tau^{B,\perp}$  (cas de l'indépendance) est l'attitude la plus sûre, où

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(x_1, x_2)} \left( T^{(1)} > \tau^{B,\perp}, T^{(2)} > \tau^{B,\perp} \right) \\ &= \mathbb{P}_{x_1} \left( T^{(1)} > \tau^{B,\perp} \right) \mathbb{P}_{x_2} \left( T^{(2)} > \tau^{B,\perp} \right) \\ &= 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

- ▶ prendre  $\tau^U = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$  n'est pas sûr du tout !

## Des choses à faire...

- Etude d'autres politiques de maintenance préventive : thèse de Hai-Ha Pham (en co-encadrement avec B. Puig),
- Tests de sélection de modèles ?
- Dans le cas de mesures/copules de Lévy paramétriques :
  - Tests de sélection de modèles ?
  - Tests de sélection de modèles ?
  - Tests de sélection de modèles ?
  - Tests de sélection de modèles ?
- Autres constructions ?
- ...

## Des choses à faire...

- Etude d'autres politiques de maintenance préventive : thèse de Hai-Ha Pham (en co-encadrement avec B. Puig),
- Tests de sélection de modèles ?
- Dans le cas de mesures/copules de Lévy paramétriques :
  - autres méthodes d'estimation ?
  - tests de sélection de modèles ?
  - autres constructions ?
  - ...

## Des choses à faire...

- Etude d'autres politiques de maintenance préventive : thèse de Hai-Ha Pham (en co-encadrement avec B. Puig),
- Tests de sélection de modèles ?
- Dans le cas de mesures/copules de Lévy paramétriques :
  - ▶ autres méthodes d'estimation ?
  - ▶ développement de méthodes numériques pour le calcul de quantiles fiabilistes ?
- Autres constructions ?
- ...

## Des choses à faire...

- Etude d'autres politiques de maintenance préventive : thèse de Hai-Ha Pham (en co-encadrement avec B. Puig),
- Tests de sélection de modèles ?
- Dans le cas de mesures/copules de Lévy paramétriques :
  - ▶ autres méthodes d'estimation ?
  - ▶ développement de méthodes numériques pour le calcul de quantiles fiabilistes ?
- Autres constructions ?
- ...

## Des choses à faire...

- Etude d'autres politiques de maintenance préventive : thèse de Hai-Ha Pham (en co-encadrement avec B. Puig),
- Tests de sélection de modèles ?
- Dans le cas de mesures/copules de Lévy paramétriques :
  - ▶ autres méthodes d'estimation ?
  - ▶ développement de méthodes numériques pour le calcul de quantités fiabilistes ?
- Autres constructions ?
- ...

## Des choses à faire...

- Etude d'autres politiques de maintenance préventive : thèse de Hai-Ha Pham (en co-encadrement avec B. Puig),
- Tests de sélection de modèles ?
- Dans le cas de mesures/copules de Lévy paramétriques :
  - ▶ autres méthodes d'estimation ?
  - ▶ développement de méthodes numériques pour le calcul de quantités fiabilistes ?
- Autres constructions ?
- ...

## Des choses à faire...

- Etude d'autres politiques de maintenance préventive : thèse de Hai-Ha Pham (en co-encadrement avec B. Puig),
- Tests de sélection de modèles ?
- Dans le cas de mesures/copules de Lévy paramétriques :
  - ▶ autres méthodes d'estimation ?
  - ▶ développement de méthodes numériques pour le calcul de quantités fiabilistes ?
- Autres constructions ?
- ...

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Etude théorique
- 3 Application aux données SNCF
- 4 Conclusion

