Processus gamma perturbé sans/avec covariables : inférence statistique et autres problèmes

Christian Paroissin

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications
Université de Pau et des Pays de l'Adour

LJK, jeudi 30 juin 2011

1. Introduction
2. Modèle de dégradation
3. Inférence statistique
4. Autres problèmes

Modéliser un phénomène de dégradation ?

Système/composant soumis à une dégradation :

- niveaux qualitatifs :
  - processus markovien de sauts
  - processus semi-markovien

- mesure (indicateur continu) :
  - processus de Wiener (homogène ou pas)
  - processus gamma (homogène ou pas)
  - processus de Poisson composée

. . . et de nombreuses variantes incorporant des variables d'environnement (covariables)

Pourquoi modéliser cela ?

- Mieux appréhender le phénomène modélisé
- Déterminer les covariables influentes
- Mieux contrôler les risques associés en proposant une politique de maintenance optimale

Plusieurs questions, plusieurs problèmes ?

- Estimation des paramètres du modèle de dégradation à partir de données de REX *[statistique, méthodes numériques]*
- Propriétés du temps d’atteinte d’un niveau de dégradation donné : loi, vieillissement, etc. *[probabilités]*
- Optimisation d’une politique de maintenance *[probabilités, méthodes numériques]*

Un modèle . . .

Processus gamma perturbé par un mouvement brownien :

$$\boxed{D(t) = G(t) + \tau B(t)}$$

avec :

- $\{G(t)\}$ processus gamma tq $G(1) \sim \Gamma(\xi, \alpha)$
- $\{B(t)\}$ un mouvement brownien
- $\tau \in \mathbb{R}$

Cas particulier

$\tau = 0$	*processus gamma pur*
$\frac{\alpha}{\xi} \to c > 0$ *et* $\frac{\alpha}{\xi^2} \to 0$	*processus de Wiener*

... avec covariables

- Variables d'environnement : $x \in \mathbb{R}^p$ (eventuellement aléatoire)

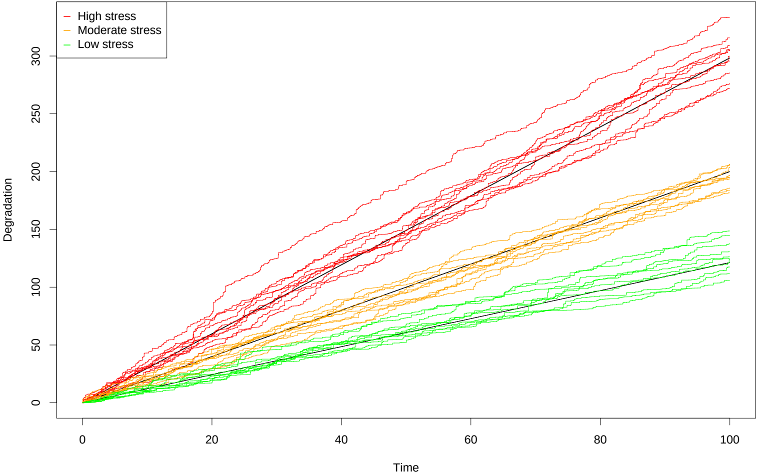
- Accélération sur l'échelle de temps du processus gamma :

$$\boxed{D_x(t) = G(te^{\beta' x}) + \tau B(t)}$$

Autrement dit : action sur le paramètre de forme

- Autres approches possibles :
  - Bagdonavičius-Nikulin (01) : idem sans perturbation brownienne
  - Lawless-Crowder (04) : action sur le paramètre d'échelle et effet aléatoire

Simulations



Paramètres / Observations

- Estimation des paramètres : $\theta' = (\xi, \alpha, \tau^2)$
  - ξ : paramètre d'échelle
  - α : paramètre de forme
  - τ^2 : poids de la perturbation brownienne

- Observations :
  - $D^{(1)}, \dots, D^{(n)}$: n processus iid
  - N_i : nombre d'observations pour le i-ème processus aux instants

$$0 = t_{i0} < t_{i1} < \cdots < t_{iN_i}$$

Notations

- Observations : $\Delta_{ij} = D^{(i)}(t_{ij}) - D^{(i)}(t_{ij-1})$ v.a. indépendantes
- Moments non-centrés :
$$m_{ij}^{(k)} = \mathbb{E}\left[\Delta_{ij}^k\right]$$
- Moments centrés :
$$\overline{m}_{ij}^{(k)} = \mathbb{E}\left[\left(\Delta_{ij} - \mathbb{E}\left[\Delta_{ij}\right]\right)^k\right]$$
- Trois moments linéaires en temps :
$$\begin{aligned} m_{ij}^{(1)} &= \frac{\alpha}{\xi}\Delta t_{ij} \\ \overline{m}_{ij}^{(2)} &= \left(\frac{\alpha}{\xi^2} + \tau^2\right)\Delta t_{ij} \\ \overline{m}_{ij}^{(3)} &= \frac{2\alpha}{\xi^3}\Delta t_{ij} \end{aligned}$$

Méthode des moments

- Notations :

$$m = \begin{pmatrix} m^{(1)} \\ \overline{m}^{(2)} \\ \overline{m}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{ij}^{(1)}/\Delta t_{ij} \\ \overline{m}_{ij}^{(2)}/\Delta t_{ij} \\ \overline{m}_{ij}^{(3)}/\Delta t_{ij} \end{pmatrix} = f(\theta)$$

- Moments empiriques $\widehat{m}_n$:

$$\widehat{m}_n = \begin{pmatrix} \widehat{m}_n^{(1)} \\ \widehat{\overline{m}}_n^{(2)} \\ \widehat{\overline{m}}_n^{(3)} \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N_i} \begin{pmatrix} \Delta_{ij}/\Delta t_{ij} \\ \left(\Delta_{ij} - \Delta t_{ij} \widehat{m}_n^{(1)} \right)^2 / \Delta t_{ij} \\ \left(\Delta_{ij} - \Delta t_{ij} \widehat{m}_n^{(1)} \right)^3 / \Delta t_{ij} \end{pmatrix}$$

- Estimation de θ par la méthode des moments :

$$\boxed{\widehat{\theta}_n = f^{-1}(\widehat{m}_n)}$$

Convergence (1/3)

Théorème

Sous les hypothèses

(H$_1$) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sum_{j=1}^{N_n}\left(\Delta t_{nj}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i\right)^{-2} < \infty$

(H$_2$) $\exists\, d_u,\ \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \forall j \in \{1,\ldots,N_i\},\ \Delta t_{ij} \leq d_u$

$\widehat{\theta}_n$ *converge p.s. vers* θ *quand* n *tend vers l'infini.*

Convergence (2/3)

Outils : LGN pour des v.a. indépendantes (Petrov, 95)

Théorème

Soit (a_n) *une suite de réels positifs. Soit* (X_n) *une suite de v.a. indépendantes . Posons* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$*. Si*

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(Var\left[X_n\right] / a_n^2 \right) < \infty$$

alors

$$\left(S_n - \mathbb{E}\left[S_n\right]\right) / a_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$$

Convergence (3/3)

Idées de la preuve : pour les moments centrés d'ordre $k \in \{2, 3\}$, on doit considérer :

$$\tilde{m}_n^{(k)} = \left(\sum_{i=1}^{n} N_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N_i} \left(\Delta t_{ij} \right)^{-1} \left(\Delta_{ij} - \mathbb{E}\left[\Delta_{ij} \right] \right)^{k}$$

et montrer que :

- $\widehat{\overline{m}}_n^{(k)} - \tilde{m}_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$
- $\tilde{m}_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \overline{m}^{(k)}$

Normalité asymptotique (1/3)

TCL pour des moments empiriques (via le TCL de Lindeberg-Feller) :

Lemme

Sous les hypothèses (H_2) *et*

$$(\mathrm{H}_3)\quad \forall u \in \{0,1,3\}\,,\ \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} N_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i} \Delta t_{ij}^{u-2} = c_u < \infty$$

il existe une matrice définie positive $\Sigma^{(\infty)}$ *telle que :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} N_i\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \hat{m}_n^{(1)} - m^{(1)} \\ \tilde{m}_n^{(2)} - \overline{m}^{(2)} \\ \tilde{m}_n^{(3)} - \overline{m}^{(3)} \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0, \Sigma^{(\infty)}\right),$$

Normalité asymptotique (2/3)

Théorème

Sous les hypothèses $(H_1) - (H_3)$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} N_i\right)^{1/2} (\widehat{m}_n - m) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, H)$$

où $H = A\Sigma^{(\infty)}A'$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3\left(\frac{\alpha}{\xi^2} + \tau^2\right)c_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Normalité asymptotique (3/3)

Application de la δ-méthode :

Théorème

Sous les hypothèses $(H_1) - (H_3)$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} N_i\right)^{1/2} \left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0, GHG'\right)$$

où G est la matrice des dérivées partielles de f^{-1}.

Paramètres / Observations

- Estimation des paramètres : $\theta' = (\xi, \alpha, \tau^2, \beta)$
  - ξ : paramètre d'échelle
  - α : paramètre de forme
  - τ^2 : poids de la perturbation brownienne
  - β : coefficient des covariables

- Observations :
  - $D^{(1)}_{x_1}, \dots, D^{(n)}_{x_n}$: n processus iid et covariables
  - $[0, T]$: intervalle de temps des observations
  - N : nombre d'observations pour tous les processus à des instants régulièrement espacés :

    $$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N$$

    avec $t_j = jT/N$.
  - accroissements : $\Delta_{ij} = D^{(i)}_{x_i}(t_j) - D^{(i)}_{x_i}(t_{j-1})$

Moindres carrés en deux étapes (1/2)

- Estimation de $\theta^{(1)} = (\gamma, \beta)$ avec $\gamma = \alpha/\xi$ en minimisant :

$$\begin{aligned} d_1^{(n)}\left(\theta^{(1)}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}\left(\Delta_{ij} - m_{x_i}^{(1)}\left(\theta^{(1)}\right)\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}\left(\Delta_{ij} - \frac{\gamma T}{N} e^{\beta^T x_i}\right)^2 . \end{aligned}$$

- Estimation de $\theta^{(2)} = (\alpha, \tau^2)$ en minimisant :

$$d_2^{(n)}\left(\theta^{(2)}, \widehat{\theta}^{(1)}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}\left(\Delta_{ij}^2 - m_{x_i}^{(2)}\left(\widehat{\theta}^{(1)}, \theta^{(2)}\right)\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}\left(\Delta_{ij}^2 - m_{x_i}^{(1)}\left(\widehat{\theta}^{(1)}, \theta^{(2)}\right)\frac{\widehat{\gamma}}{\alpha} - m_{x_i}^{(1)}\left(\widehat{\theta}^{(1)}, \theta^{(2)}\right)^2 - \tau^2 T/N\right)^2$$

Moindres carrés en deux étapes (2/2)

Hypothèse : x réalisation d'un vecteur aléatoire de densité f_X par rapport à la mesure μ_p sur $\mathbb{R}^p$.

LGN :

$$d_1^{(n)}\left(\theta^{(1)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{Pr} d_1\left(\theta^{(1)}\right) = \int \mathbb{E}_{\theta_0}\left[D_x\left(\frac{T}{N}\right) - m_x^{(1)}\left(\theta^{(1)}\right)\right]^2 f_X(x)\,\mathrm{d}\mu_p(x)$$

et:

$$d_2^{(n)}\left(\theta^{(2)},\theta^{(1)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{Pr} d_2\left(\theta^{(2)},\theta^{(1)}\right) = \int \mathbb{E}_{\theta_0}\left[D_x^2\left(\frac{T}{N}\right) - m_x^{(2)}\left(\theta^{(1)},\theta^{(2)}\right)\right]^2 f_X(x)\,\mathrm{d}\mu_p(x)$$

Convergence (1/2)

Résultat général pour les moindres carrés en deux étapes :

Lemme

On suppose que :

1. Θ *est un ensemble compact*
2. *Pour* $i \in \{1, 2\}$, $\theta \longmapsto d_i(\theta)$ *est continue et vérifient :*
   - ▷ $d_i(\theta) \geq 0$,
   - ▷ $d_1(\theta)$ *a un unique minimum en* $\theta_0^{(1)} \in \mathring{\Theta}_1$,
   - ▷ $d_2(\theta)$ *a un unique minimum en* $\theta_0 \in \mathring{\Theta}$.
3. $\sup_{\theta \in \Theta} \| d^{(n)}(\theta) - d(\theta) \| \xrightarrow[n \to \infty]{Pr} 0.$

Alors $(\widehat{\theta}_n)_{n \geq 0}$ *converge en probabilité vers* θ_0 *quand n tend vers l'infini.*

Convergence (2/2)

Application du lemme :

Proposition

Sous les hypothèses suivantes :

(A_1) Θ *est un ensemble compact tq* $\theta_0 \in \mathring{\Theta}$ *et* $\beta_0 \neq 0$

(A_2) X *est un vecteur aléatoire uniformément borné*

(A_3) *Soit* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^p$ *tq* $\mu_p\left(\overline{\mathcal{A}}\right) = 0$*. Il existe* $x_1, \ldots, x_{p+1} \in \mathcal{A}$ *tq*

- (a) $\forall i \in \{1, \ldots, p+1\}, \; f_X(x_i) > 0$
- (b) *pour tout* $i \in \{1, \ldots, p+1\}$ *on pose* $\tilde{x}_i^T = \begin{pmatrix} 1 & x_i^T \end{pmatrix}$*. Alors* $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{p+1}$ *sont linéairement indépendants.*

on a $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{Pr} \theta_0$*.*

Normalité asymptotique (1/3)

Des notations supplémentaires :

$$
\begin{aligned}
I_n^{(1)}\left(\theta^{(1)}\right) &= \frac{\partial^2 d_1^{(n)}}{\partial\theta^{(1)}\partial\theta^{(1)\,T}}\left(\theta^{(1)}\right)\\
I_n^{(2)}\left(\theta^{(1)},\theta^{(2)}\right) &= \frac{\partial^2 d_2^{(n)}}{\partial\theta^{(2)}\partial\theta^{(2)\,T}}\left(\theta^{(1)},\theta^{(2)}\right)\\
I_n^{(3)}\left(\theta^{(1)},\theta^{(2)}\right) &= \frac{\partial^2 d_2^{(n)}}{\partial\theta^{(1)}\partial\theta^{(2)\,T}}\left(\theta^{(1)},\theta^{(2)}\right)
\end{aligned}
$$

ayant pour limite (si existence) $I_\infty^{(k)}(\theta)$ quand n tend vers l'infini.
On pose :

$$
I_\infty(\theta_0) = \begin{pmatrix} I_\infty^{(1)}(\theta_0) & 0 \\ I_\infty^{(3)}(\theta_0) & I_\infty^{(2)}(\theta_0) \end{pmatrix}
$$

pouvant être estimées par $I_n\left(\widehat{\theta}_n^{(1)},\widehat{\theta}_n^{(2)}\right)$.

Normalité asymptotique (2/3)

et encore d'autres notations :

$$x_i^{\otimes k_1} = \begin{cases} 1 & \textit{if} \quad k_1 = 0 \\ x_i & \textit{if} \quad k_1 = 1 \\ x_i x_i^T & \textit{if} \quad k_1 = 2 \\ x_i x_i^T x_i^{\otimes 2} & \textit{if} \quad k_1 = 4 \end{cases}$$

Normalité asymptotique (3/3)

Théorème

Sous les hypothèses $(A_1) - (A_3)$ *et*

(A_4) *pour tout* $\theta \in \Theta$, $I_\infty(\theta)$ *est inversible :* $J(\theta_0) = I_\infty(\theta_0)^{-1}$

(A_5) *il existe une constante* $\epsilon > 0$ *et des fonctions* E_{k_1,k_2} *tq*

$$\sup_{\beta \in B(\beta_0,\epsilon)} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\otimes k_1} e^{k_2 \beta' x_i} - E_{k_1,k_2}(\beta) \right| \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} 0,$$

Alors

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{d} N\left(0, \left(J(\theta_0)' \Sigma J(\theta_0)\right)\right)$$

où Σ *est une certaine matrice (connue explicitement)*

Applications : tests statistiques

- Construction d'ensemble de confiance (intervalle, ellipsoïde, etc.)
- Tests sur les paramètres :
  - pas d'effets d'une ou plusieurs covariables : $H_0 : L\beta = 0$ (L application linéaire)
  - sélection de modèles :
    - processus gamma pur : $H_0 : \tau^2 = 0$
    - processus de Wiener : $H_0 : \frac{\alpha}{\xi^2} = 0$

Critère : comparaison entre $d_1^{(n)}\left(\widehat{\theta}^{(1)}\right)$ et

$$\tilde{d}_1^{(n)}(\theta) = \frac{1}{nN}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{var}_\theta(\Delta_{ij}) = \frac{T}{nN}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\gamma}{\xi}e^{\beta' x_i} + \tau^2\right)$$

Théorème

Sous les mêmes hypothèses,

$$\sqrt{n}\left(d_1^{(n)}\left(\widehat{\theta}^{(1)}\right) - \tilde{d}_1^{(n)}(\widehat{\theta})\right) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{d} N(0,\Gamma)$$

où Γ est une certaine matrice (connue explicitement)

Un meilleur estimateur ?

Sur la base d'études empiriques…

- une autre paramétrisation : $s = \xi^{-1}$
- estimation de τ^2 en utilisant le critère $d_2^{(n)}$
- estimation de s en utilisant un troisième critère :

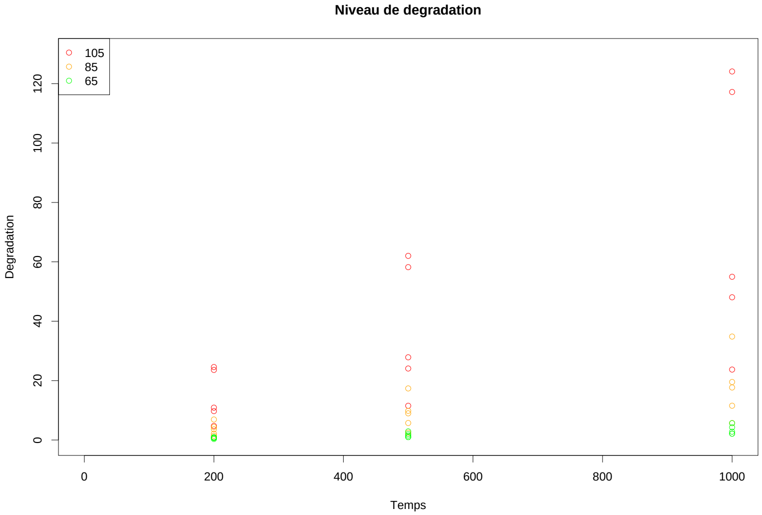
$$d_3^{(n)}\left(\theta^{(2)}, \widehat{\theta}^{(1)}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}\left(\Delta_{ij}^{3} - m_{x_i}^{(3)}\left(\widehat{\theta}^{(1)}, \theta^{(2)}\right)\right)^2$$

Exemple (1/3)

- $n = 15$ unités testées sous l'une des trois différentes températures (covariable) :
  - 5 unités à 65 degrés : $x = (1, 0, 0)$
  - 5 unités à 85 degrés : $x = (0, 1, 0)$
  - 5 unités à 10 degrés : $x = (0, 0, 1)$

- $N = 3$ mesures de la dégradation : $t_1 = 200$, $t_2 = 500$ et $t_3 = 1000$ heures

Exemple (2/3)



Niveau de degradation
105
85
65
Degradation
0
20
40
60
80
100
120
Temps
0
200
400
600
800
1000

Exemple (3/3)

- Estimation des paramètres :

Modèle	$\widehat{\alpha}$	$\widehat{s}$	$\widehat{\tau}^2$	$\widehat{\beta}_{65}$	$\widehat{\beta}_{85}$	$\widehat{\beta}_{105}$
PG	1.30e-3	23.81				
PGP	2.4e-3	13.15	7.7e-2			
PGP cov	2.3e-3	4.29	7.63e-2	-0.61	0	1.08

- Dégradations moyennes :

Stress	faible	moyen	fort
Dégradation moyenne	1.32e-2	2.42e-2	7.18e-2

Premier temps de passage ...

- Premier temps de passage d'un niveau b fixé :

$$T_b = \inf\{t \geq 0 \; ; \; D(t) \geq b\}$$

- Loi de T_b ?
  - via une approximation par un PCC perturbé (cf. modèle en actuariat)
  - via les fonctions d'échelle $W^{(\delta)}$ pour processus de Lévy spectralement négatif d'exposants de Lévy φ_D :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W^{(\delta)}(x)dx = \frac{1}{\varphi_D(\lambda) - \delta} \quad (\lambda > \rho)$$

...ou dernier temps de passage ?

- Approche proposée par Barker et Newby (RESS, 2009)
- Dernier temps de passage d'un niveau b fixé :

$$L_b = \sup\{t \geq 0\ ;\ D(t) \leq b\}$$

- Loi via les fonctions d'échelle :

Théorème

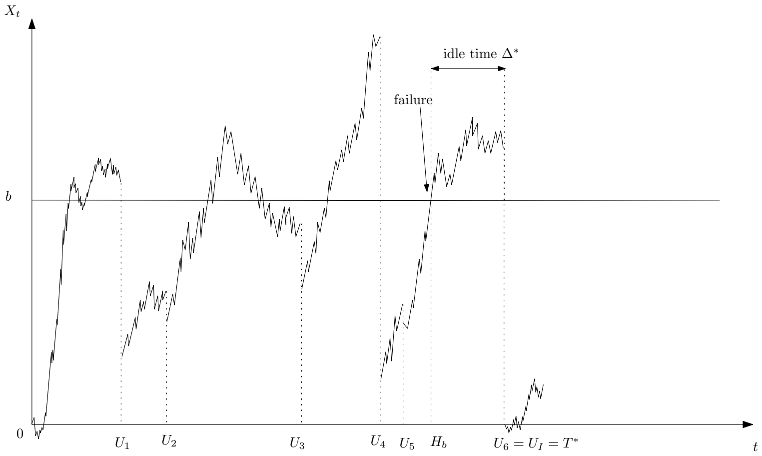
Pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(L_b < t) = \int_b^\infty \mathbb{E}[D(1)].W(a-b)f_{D(t)}(a)da$$

avec $f_{D(t)}$ la densité de $D(t)$ et $W(.) = W^{(\delta)}(.)$ la fonction d'échelle en $\delta = 0$

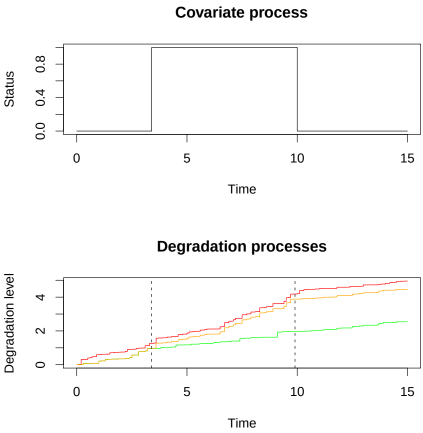
Maintenance optimale ?

Etude d'une politique de maintenance à la Barker et Newby ?



Processus gamma modulé

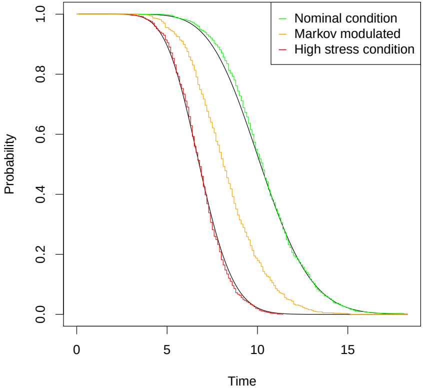
Processus gamma (non pertubé) avec covariables dépendantes du temps



Loi du temps d'atteinte

Comparaisons stochastiques :

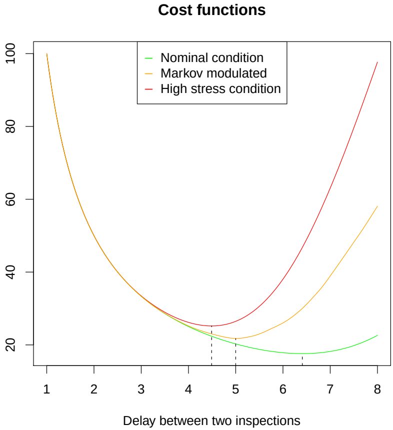
$$T_c^{(1)} \preceq_{st} T_c \preceq_{st} T_c^{(0)}$$



Une politique optimale de maintenance

Fonction de coût :

$$C_\infty(\delta) = \lim_{t\to\infty} \frac{C_t(\delta)}{t} = \frac{\mathbb{E}[c_r + c_u(\delta - T_c)_+]}{\delta} = \frac{c_r + c_u \int_0^\delta F_{T_c}(u)du}{\delta}$$



Un peu de publicité !

Journée thématique "Fiabilité et Assurance"

SMAI/MAS, SFdS/BFA, SFdS/FI

Mercredi 16 novembre 2011, Toulouse

Orateurs :

- Patrice Bertail (Univ. Paris Ouest Nanterre La Défense)
- Jun Cai (Univ. de Waterloo, Canada)
- Jérôme Collet (EdF R&D, OSIRIS)
- Stéphane Loisel (Univ. de Lyon)

Preprints

- L. Bordes and C. Paroissin and A. Salami.
  Parametric inference in a perturbed gamma degradation process. *Preprint, mai 2010*. Soumis.
- L. Bordes and C. Paroissin and A. Salami.
  Combining Gamma and Brownian processes for degradation modeling in presence of explanatory variables. *Preprint, novembre 2010*. En révision.
- C. Paroissin and L. Rabehasaina.
  On the failure time for some perturbed increasing Lévy processes. *En préparation (soumission en 2011 ?)*.
- C. Paroissin and L. Rabehasaina.
  On the gamma process modulated by a Markov jump process. *En préparation (soumission en 2011 ?)*.