

Optimisation de l'allocation de la redondance et de la fiabilité

**Groupe de
travail
FIMA**

Laure Rigal

Plan

- **Présentation des Problèmes de fiabilité.**
- **Présentation des Algorithmes génétiques.**
- **Résolution par un Algorithme génétique spécifique**
- **Perspectives**

1

Deux objectifs en conflits:

- 1) Maximiser la fiabilité
- 2) Minimiser le coût

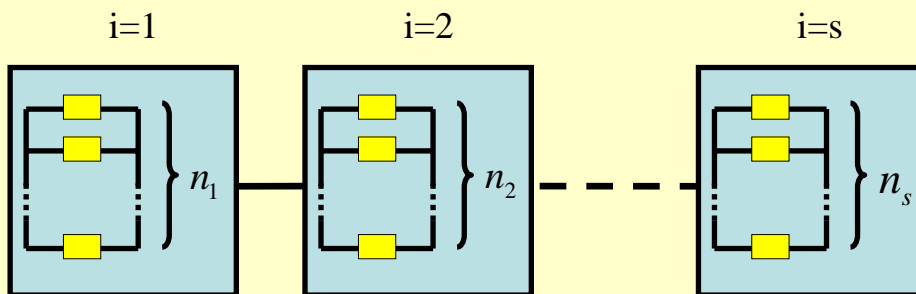
Sous des contraintes
de poids et de volume,...



$$\operatorname{argmax}\{F(\vec{n}) : \vec{n} \in N_R\}$$

2

Redundancy optimization
problem



$$\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_s)$$

3

Redundancy optimization problem

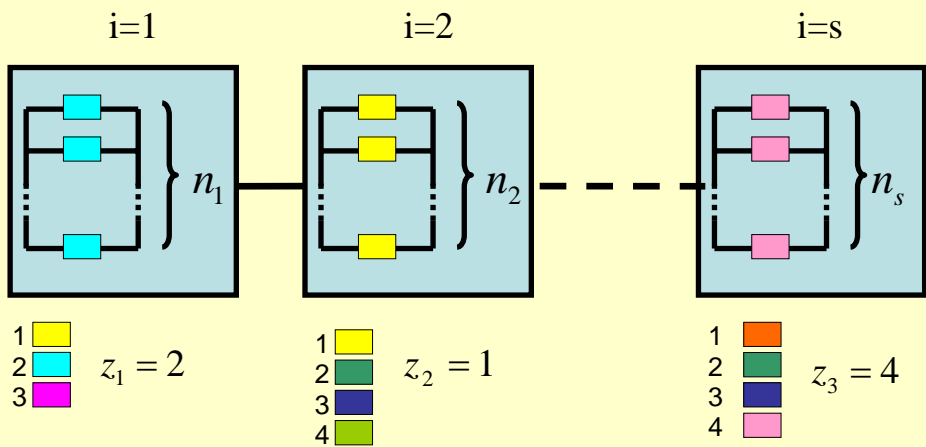
Une solution du problème d'optimisation s'écrit:

$$\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_s)$$

$$\max F(\vec{n}) \text{ subject to } \begin{cases} \sum_{i=1}^s g_{k,i}(n_i) \leq b_k \text{ or } \sum_{i=1}^s g_{k,i}(n_i) \geq b_k \\ k = 1, \dots, T \\ n_i \in 1, 2, \dots, n_{i,max} \end{cases}$$

4

Structure optimization problem



5

Structure optimization problem

Une solution du problème d'optimisation s'écrit:

$$\vec{n} = (n, z) \quad \text{où,} \quad \begin{cases} n = (n_1, n_2, \dots, n_s) \\ z = (z_1, z_2, \dots, z_s) \end{cases}$$

$$\max F(z, n) \text{ subject to } \begin{cases} \sum_{i=1}^s g_{k,i}(z_i, n_i) \geq b_k \text{ or } \sum_{i=1}^s g_{k,i}(z_i, n_i) \leq b_k \\ k = 1, \dots, T \\ n_i \in 1, 2, \dots, n_{i,max} \\ z_i \in 1, 2, \dots, z_{i,max} \end{cases}$$

6

Trois problèmes numériques

- **Exemple 1 :** Redundancy optimization problem.

F. A. Tillman, C. L. Hwang, L. T. Fan and S. A. Balbale. System reliability subject to multiple non linear constraints. *IEEE Transactions on Reliability*, R-17(17), 153-157, 1968.

- **Exemple 2 :** Redundancy optimization problem.

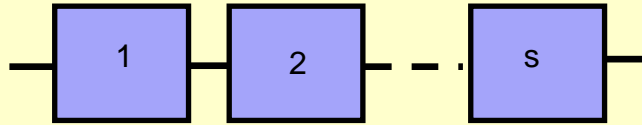
T. Yokota, M. Gen and K. Ida. System reliability optimization problems with several failure modes by genetic algorithm. *Japanese Journal of Fuzzy Theory and Systems*, 7(1): 117-135, 1995.

- **Exemple 3 :** Structure optimization problem.

J'ai moi-même conçu cet exemple numérique par une **extrapolation** à partir des données numériques prises dans trois articles différents.

7

Configuration en Série

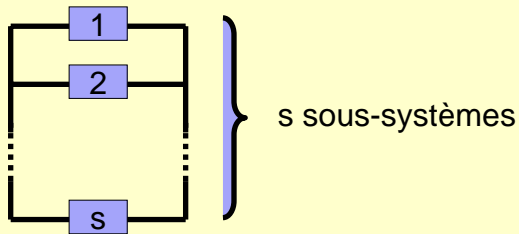


Un système doit remplir s fonctions f_1, f_2, \dots, f_s . On note $F(t)$ la fiabilité du système sur l'intervalle de temps $[0; t]$. On note $F_i(t)$ la fiabilité du i ème composant. Alors:

$$F(t) = \prod_{i=1}^s F_i(t)$$

8

Configuration en Parallèle

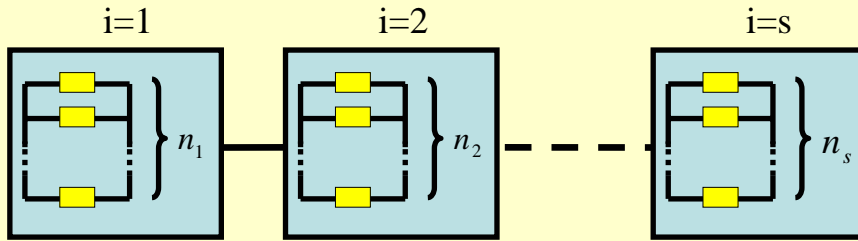


Un système doit remplir une seule fonction f . On note $F(t)$ la fiabilité du système sur l'intervalle de temps $[0; t]$. On note $F_i(t)$ la fiabilité du i ème composant. Alors:

$$F(t) = 1 - \prod_{i=1}^s (1 - F_i(t))$$

9

Configuration en Parrallèle-Série

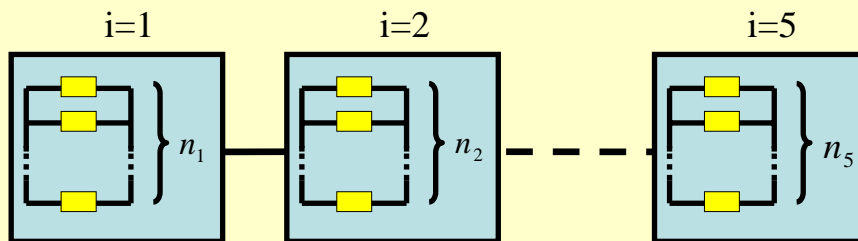


Un système doit remplir s fonctions f_1, f_2, \dots, f_s . On note $F(t)$ la fiabilité du système sur l'intervalle de temps $[0; t]$. On note $F_{i,j}(t)$ la fiabilité du jème composant dans le sous-système i . Alors:

$$F(t) = \prod_{i=1}^s \left(1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - F_{i,j}(t)) \right)$$

10

Exemple Numérique 1



Le nombre de sous-système est donné par: $s=5$

Le nombre de composants en redondance au plus autorisé par sous-système est donné par le vecteur:

$$n_{1,\max} = \dots = n_{5,\max} = 9$$

11

L'expression de la fiabilité est donnée par la formule suivante:

$$F(\vec{n}) = \prod_{i=1}^5 (1 - q_i^{n_i})$$

En effet il suffit de voir que,

$$\forall j \in \{1, \dots, n_{i, \max}\}, \quad F_{i,j}(t) = 1 - q_i$$

12

Trois contraintes

- Une contrainte de poids et de volume

$$\sum_{i=1}^5 p(i)(n_i - 1)^2 \leq b_1$$

- Une contrainte de coût

$$\sum_{i=1}^5 c(i) \times (n_i - 1 + \exp(\frac{n_i - 1}{4})) \leq b_2$$

where $c(i)(n_i - 1)$ is the cost of a component at the i th stage and $c(i) \exp(\frac{n_i - 1}{4})$ is the additional cost for interconnecting parallel components.

13

- Une contrainte de poids

$$\sum_{i=1}^5 w(i) \times (n_i - 1) \times \exp\left(\frac{n_i - 1}{4}\right) \leq b_3$$

where $w(i)(n_i - 1)$ is the weight of the total components at the i th stage. This is increased by a factor $\exp(\frac{n_i-1}{4})$ due to the weight of the interconnecting links.

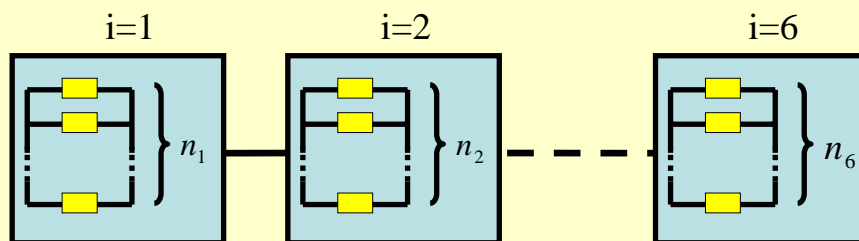
Remarque:

$$|N| = 2^{15} = 32768$$

$$\frac{|N_R|}{|N|} < 0.01$$

14

Exemple Numérique 2



Mais ici, on a plusieurs modes de défaillance !!!!

$$n_{1,\max} = \dots = n_{6,\max} = 9$$

15

Mode de défaillance

Le **mode de défaillance** est la forme observable du dysfonctionnement d'un produit ou d'une opération du système étudié. Un mode de défaillance doit répondre aux caractéristiques suivantes :

- Il est relatif à la fonction étudiée.
- Il décrit la manière dont le système ne remplit plus sa fonction.
- Il s'exprime en termes physiques précis (court-circuit...)
- Il existe 5 modes génériques de défaillance :
 - perte de la fonction
 - fonctionnement intempestif
 - démarrage impossible
 - arrêt impossible
 - fonctionnement dégradé

16

- Tous les composants dans un même sous-système i sont défaillant selon un seul mode de défaillance.
- Chaque composant dans un même sous-système i est soumis à S_i modes de défaillances.
- Les S_i modes de défaillances sont classés en deux catégories:
 1. $O (e = 1, 2, \dots, h_i)$ représente la classe de défaillance dans laquelle il faut qu'un seul composant soit défaillant pour que le sous-système i soit défaillant.
 2. $F (e = h_i + 1, \dots, S_i)$ représente la classe de défaillance dans laquelle il faut que tous les composants soient défaillants pour que le sous-système i soit défaillant.

17

Calcul de la fiabilité

Rappel une solution est représentée par:

$$\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_6)$$

On note $F(\vec{n})$ la **fiabilité du système** sur l'intervalle de temps $[0; t]$.

On note $Q_i(n_i)$ la **défiabilité du sous-système i**.

Comme les sous-systèmes sont disposés en série, on obtient:

$$F(\vec{n}) = \prod_{i=1}^6 (1 - Q_i(n_i))$$

18

On note $q_{i,e}$ la défiabilité d'un composant dans le sous-système i qui est due à l'apparition d'un mode de défaillance du type e.

$$Q_i(n_i) = \sum_{e=1}^{h_i} \left(1 - \prod_{i=1}^{n_i} (1 - q_{i,e}) \right) + \sum_{e=h_i+1}^{S_i} \left(\prod_{i=1}^{n_i} q_{i,e} \right)$$

Or, tous les composants dans un même sous-système sont identiques:

$$Q_i(n_i) = \sum_{e=1}^{h_i} \left(1 - (1 - q_{i,e})^{n_i} \right) + \sum_{e=h_i+1}^{S_i} q_{i,e}^{n_i}$$

19

En réintégrant l'expression de $Q_i(n_i)$ dans l'équation qui permet de calculer $F(\vec{n})$, on obtient:

$$F(\vec{n}) = \prod_{i=1}^6 \left(1 - h_i + \sum_{e=1}^{h_i} (1 - q_{i,e})^{n_i} - \sum_{e=h_i+1}^{S_i} q_{i,e}^{n_i} \right)$$

20

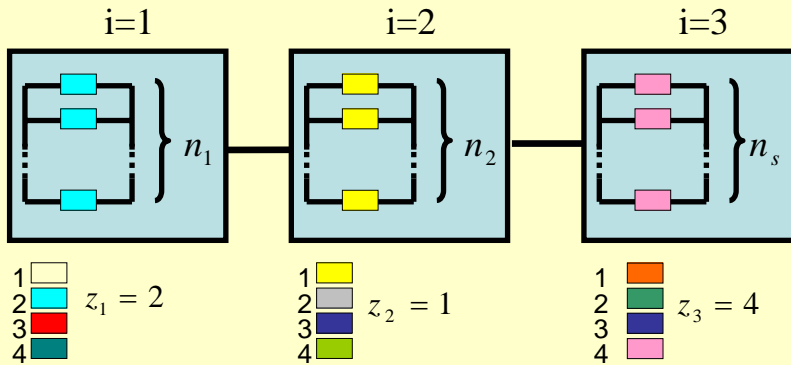
Expression des trois contraintes

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 (n_i - 1 + g1(i))^2 &\leq b_1, \\ \sum_{i=1}^6 g2(i) \times (n_i - 1 + \exp(-n_i + 1)) &\geq b_2, \\ \sum_{i=1}^6 g3(i) \times (n_i - 1) \times \exp\left(-\frac{n_i - 1}{4}\right) &\geq b_3, \end{aligned}$$

Elles ne sont pas linéaire !!!

21

Exemple Numérique 3



On a plusieurs modes de défaillance !!!!

22

Représentation d'une solution

Rappel une solution est représentée par:

$$\vec{n} = (n, z) \quad \text{où,} \quad \begin{cases} n = (n_1, n_2, n_3) \\ z = (z_1, z_2, z_3) \end{cases}$$

$$n_{1,\max} = n_{2,\max} = n_{3,\max} = 9$$

$$z_{1,\max} = z_{2,\max} = z_{3,\max} = 4$$

Ainsi, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $1 \leq n_i \leq 9$ et $1 \leq z_i \leq 4$

23

Calcul de la fiabilité

$$F(z, n) = \prod_{i=1}^s \left[1 - h_i + \sum_{e=1}^{h_i} (1 - q_{i,z_i,e})^{n_i} - \sum_{e=h_i+1}^{S_i} q_{i,z_i,e}^{n_i} \right]$$

Expression des trois contraintes

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 (n_i - 1 + g1(i, z_i))^2 &\leq b_1, \\ \sum_{i=1}^6 g2(i, z_i) \times (n_i - 1 + \exp(-n_i + 1)) &\geq b_2, \\ \sum_{i=1}^6 g3(i, z_i) \times (n_i - 1) \times \exp\left(-\frac{n_i - 1}{4}\right) &\geq b_3, \end{aligned}$$

Plan

- Présentation des Problèmes de fiabilités.
- Présentation des algorithmes génétiques.
- Résolution par un Algorithme génétique spécifique.
- Perspectives.

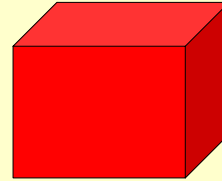
24

Des problèmes issus de la fiabilité

$$f : N \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$\vec{n} \mapsto f(\vec{n})$$

$$N \subseteq \mathbb{N}^s$$

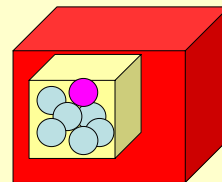


$$g_1(\vec{n}) \leq b_1$$

...

$$g_T(\vec{n}) \leq b_T$$

$$N \subseteq \mathbb{N}^s$$



25

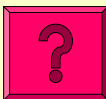
Observation sur cette classe de problèmes de fiabilité :

L'Algorithme génétique (AG) est l'une des **métaheuristiques** (outil d'optimisation) les plus utilisées pour résoudre cette classe de problèmes



On observe une explosion combinatoire : ce sont des problèmes **NP difficiles**

Une classe particulière d'AGs a donné de bons résultats à condition de bien **choisir** les différents **paramètres**



Comment choisir des paramètres ?

M. S. Chern : On the computation complexity of reliability redundancy allocation in a series system. *Operations Research Letters* (1992).

26

Une classe particulière d'AGs

Algorithmes génétiques sont des algorithmes d'optimisation stochastiques

Chaque individu  est codé informatiquement par un chromosome

individu \approx chromosome

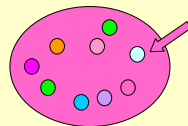
Les chromosomes sont des vecteurs d'éléments (gènes ou allèles) choisis dans un alphabet fini.

0 1 0 0 0

Codage binaire

27

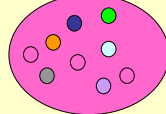
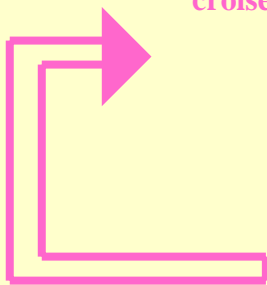
Etape initiale



individu

Création d'une population initiale de taille fixe m

Simulation informatique de différent processus : **mutation, croisement, sélection, remplacement.**



imitation du processus de la sélection naturelle.

Un critère d'arrêt

28

Le croisement

L'opérateur de croisement imite la reproduction d'individus

Création avec la probabilité P_c de deux nouveaux individus (C1,C2) à partir d'un couple de parents (P1,P2) : **héritage génétique.**

P1	110	0000	Croisement en 1 point
P2	000	1100	
C1	110	1100	
C2	000	0000	

29

Les mutations

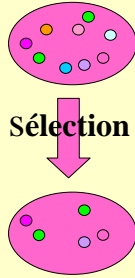
Chaque bits (ou allèle) d'un chromosome est muté avec la probabilité P_m : **apparition de nouveaux bits**

Notion de diversité

$$P_m=0.5$$

Parent P1	0	1	1	0	0	0
Nombre aleatoire entre 0 et 1	0.25	0.32	0.56	0.66	0.89	0.12
Enfant C1	1	0	1	0	0	1

30



Seul les individus les mieux adaptés à leur environnement survivent !

Mesure



Pour évaluer la capacité de survie d'un individu dans son milieu.

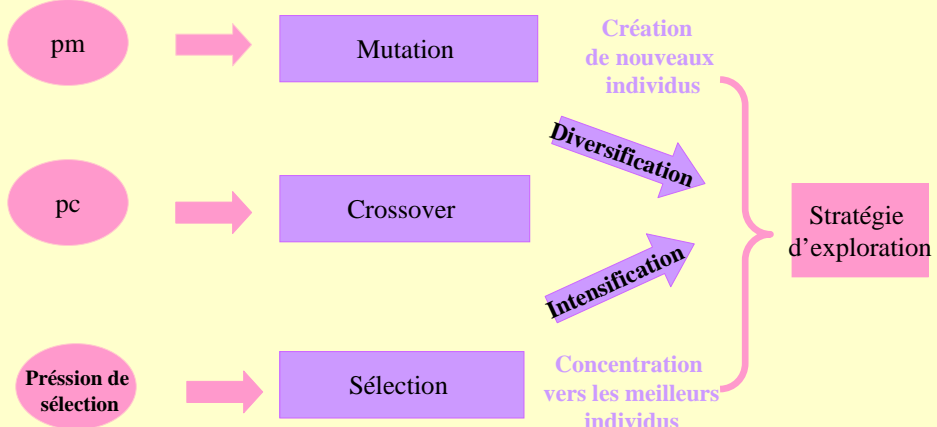


La fonction d'évaluation ou la fonction fitness notée f

Préssion de sélection

$$\approx \frac{\text{probabilite de selection du meilleur individu}}{\text{probabilite de selection de l'individu moyen}}$$

31



Plan

- Présentation des Problèmes de fiabilités.
- Présentation des algorithmes génétiques.
- **Résolution par un Algorithme génétique spécifique.**
- Perspectives.

32

But de AG1

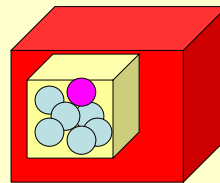
Atteindre le plus rapidement possible les bonnes solutions du problème d'optimisation qui vérifie deux hypothèse : H0 et H1

H0

La fonction fitness est croissante
composante par
composante sur l'espace des
solutions réalisables

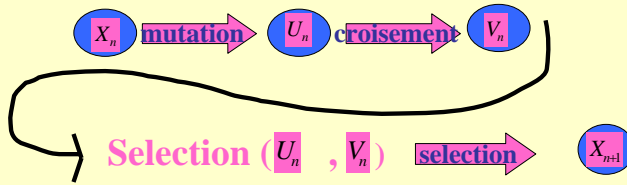
H1

L'espace des solutions
réalisables est ``connexe''



33

AG 1

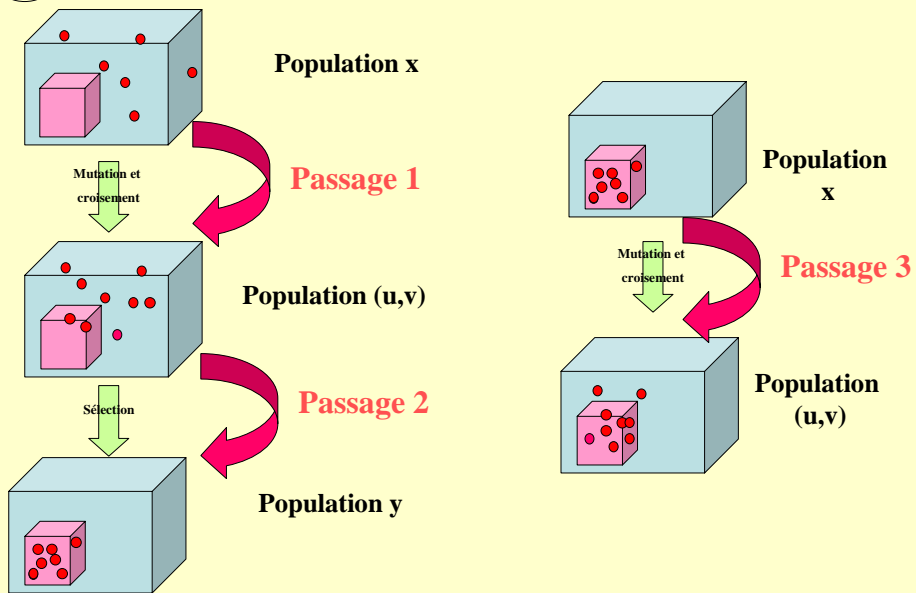


$$X_n^l = x \xrightarrow[\text{mutation}]{\alpha(x,u) \times \beta(u,v)} (u,v) \xrightarrow[\text{selection}]{\gamma_\ell((u,v),y)} X_{n+1}^l = y$$

Perturbation du processus de sélection inspirée très fortement de R. Cerf : Boltzmann Sélection appliquée à $\ln(f)$

34

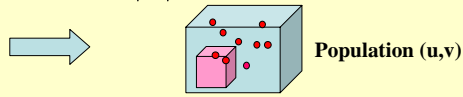
Notre stratégie d'exploration



35

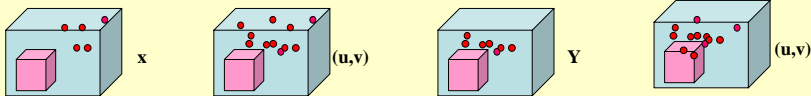
Passage 1

- Soit $\frac{|E_{NR}|}{|E|}$ très faible de l'ordre de 10^{-3} au mieux.



- Soit $\frac{|E_{NR}|}{|E|}$ n'est pas très faible

→ Ajout de coefficient proportionnel
à la violation des contraintes
+
Un pénalité forte à toutes les solutions irréalisables



36

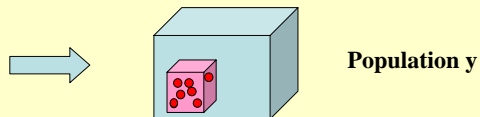
Passage 2

$$P(X_{n+1}^\ell = y / (U_n^\ell, V_n^\ell) = (u, v)) \underset{\ell \rightarrow \infty}{\propto} \exp(-V((u, v), y)\ell)$$

$$V((u, v), y) = \sum_{i=1}^m \ln(\hat{f}(u, v)) - \ln(f(y_i))$$

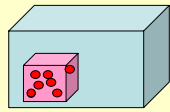
$$(u, v) \in E_{mx}, \text{ si } y \notin E_R, V((u, v), y) \geq \text{cte}(\text{pénalité}) \times m$$

**La fonction V est une fonction ciseau qui
coupent les populations y qui ne sont pas dans l'espace
des solutions réalisables**



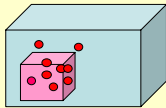
37

Passage 3



Population
x

Mutation et
croisement



Population
(u,v)

Exploitation des
propriétés de
connexité de l'espace



Mutation et
croisement

A partir de solutions réalisables
on crée
de nouvelles solutions réalisables

38

Trois Exemples Numériques

- Exemple numérique 2.
(15% de solutions réalisables)
- Exemple numérique 3.
(20.8% de solutions réalisables)

} $\frac{|E_{NR}|}{|E|}$ est très faible

- Exemple numérique 1.
(moins de 1% de solutions réalisables).

$\frac{|E_{NR}|}{|E|}$ n'est pas faible.

40

Comment a-t-on tracé les courbes ?

- **Les processus de mutation et croisement** sont **les mêmes** pour tous les algorithmes !
- Pour tous les algorithmes on observe les résultats au bout de **20 générations** et pour **des populations de taille 100**.
- Pour chaque point, on a fait **1000 simulations**.

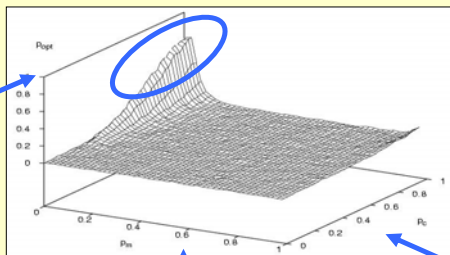


Au plus 4000 solutions observés !!!!

41

Exemple numérique 2

La probabilité
d'obtenir
la solution
optimale



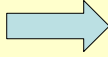
Probabilité de mutation

Probabilité de
croisement

42

Exemple numérique 2.

$$|N| = 2^{18} = 262144$$



Dans le pire cas on a **2%** des solutions qui ont été explorées.

Exemple numérique 3.

$$|N| = 2^{15} = 32768$$



Dans le pire cas on a **12%** des solutions qui ont été explorées.

Exemple numérique 1.

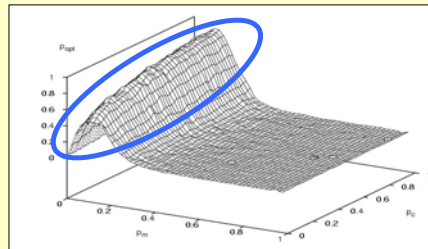
$$|N| = 2^{15} = 32768$$



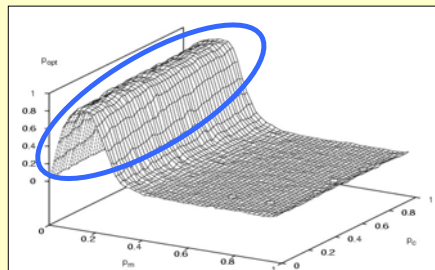
Dans le pire cas on a **12%** des solutions qui ont été explorées.

43

$$\ell = 100$$



$$\ell = 1000$$

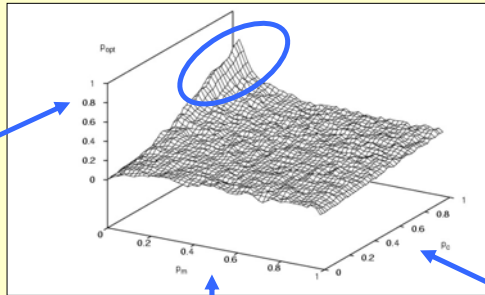


L. Rigal and al. : Introduction of a new selection parameter in genetic algorithm for constrained reliability design problem. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference. (2004)

44

Exemple numérique 3

Probabilité
d'obtenir
une bonne
solution

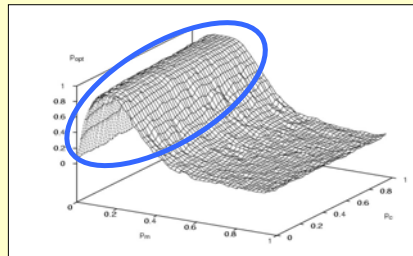


Probabilité
de croisement

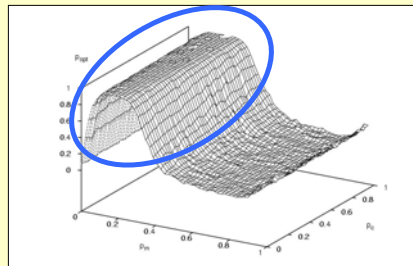
Probabilité de mutation

45

$\ell = 100$



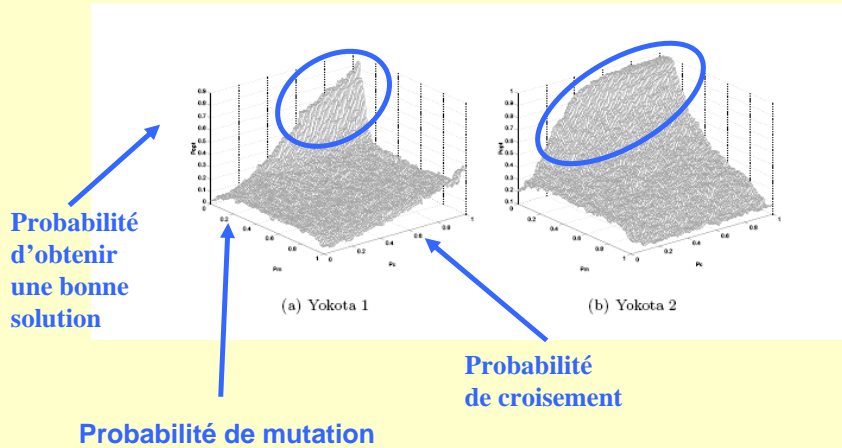
$\ell = 1000$



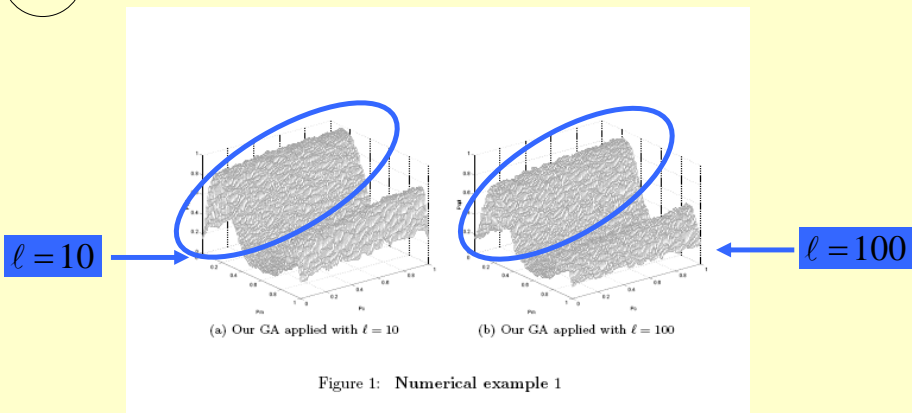
**L. Rigal and al. : Introduction of a new selection parameter
in genetic algorithm for a constrained reliability design problem.
*Proceedings of the 2004 Tenth ISSAT Conference. (2004)***

46

Exemple numérique 1



47



L. Rigal: Parameters Control Policy in Genetic Algorithm for Problems Satisfying Two Topological Criteria. Soumis à Methodology & Computing in Applied Probability

Plan

- Présentation des Problèmes de fiabilité.
- Présentation des Algorithmes génétiques.
- Résolution par un Algorithme génétique spécifique
- Perspectives

48

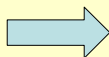
Perspectives

**AG1 est un outil d'optimisation efficace
qui se dirige rapidement vers de bonnes solutions réalisables.**

**Les perspectives de recherche :
plus d'expérimentation**

+

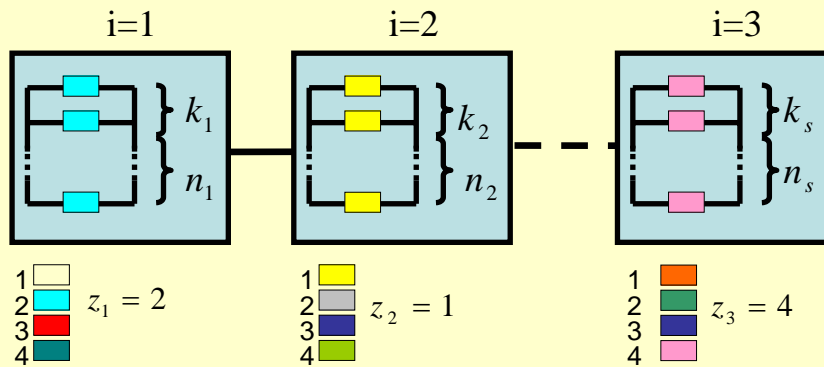
existe d'autres problèmes qu'en fiabilité qui vérifie H0 et H1 ?



Quelques pistes de recherche ?

49

A consecutive-k-out-of-n system is an n-component system that fails when k consecutive components fail.



50

Redundancy and reliability allocation

