

# Actualisation Bayésienne des prévisions du comportement de transfert de grands ouvrages de confinement

FIMA – 17 Décembre 2020



Donatien Rossat

Thèse EDF/DIPNN/DT & 3SR

12/2019-12/2022



# Sommaire



**1. Introduction**

**2. Prév́ision de la fuite d'ouvrages de confinement**

**3. Discussion, problémes méthodologiques**

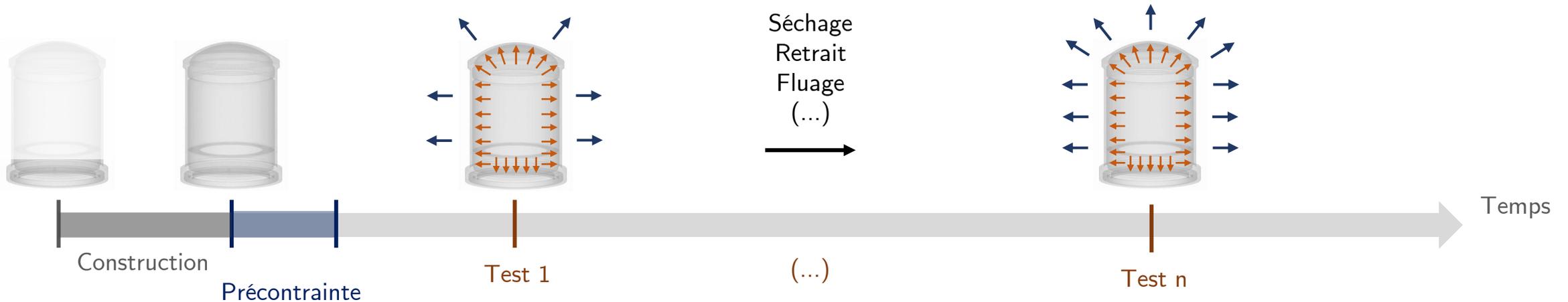
# 1. Introduction



- Description de l'objet d'étude
- Problématique
- Enjeux industriels et scientifiques

## Description de l'objet d'étude

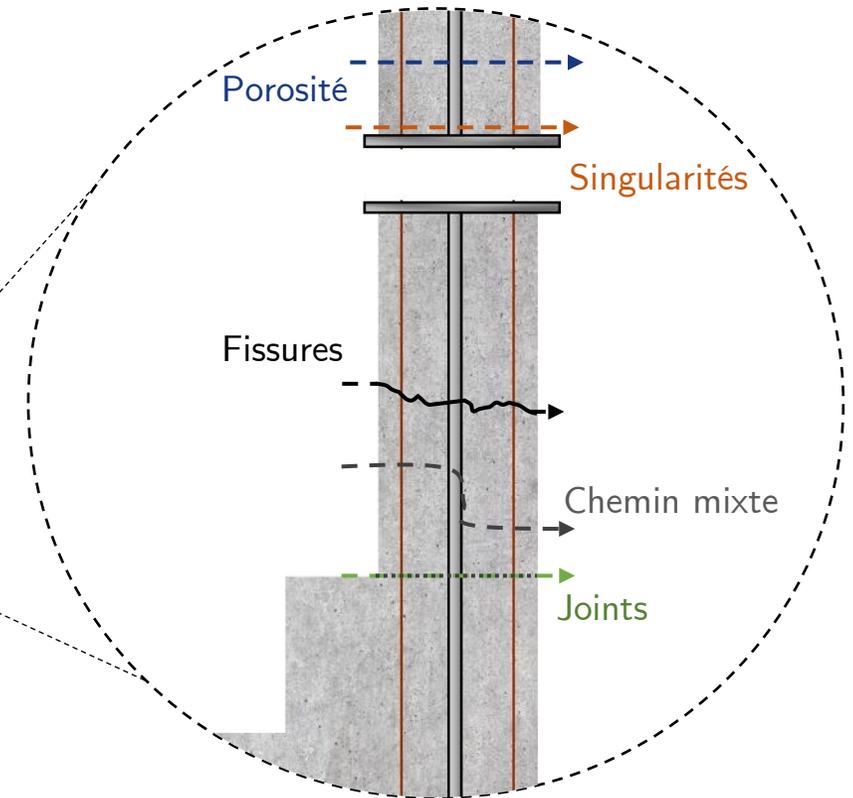
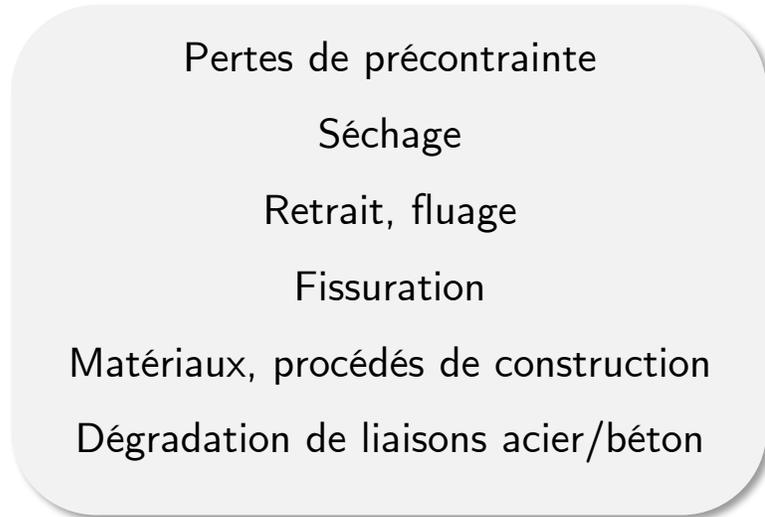
- Les ouvrages de confinement constituent en général des structures en béton armé et précontraint...
- ...soumises à des tests périodiques de pressurisation visant à évaluer leur étanchéité...
- ... se dégradant plus ou moins significativement avec le temps, sous l'effet de divers processus physiques



- **Introduction**
- Prévion de la fuite d'ouvrages de confinement
- Discussion, problèmes méthodologiques

- Description de l'objet d'étude
- **Problématique**
- Enjeux industriels et scientifiques

## La fuite des ouvrages de confinement, un phénomène aux multiples facteurs



Chemins de fuites potentiels lors d'un test de pressurisation.

## Mesures de fuites *in situ*

- Deux types de mesures de fuite : mesures **globales** et **locales**, réalisées lors de Visites Décennales
- **Mesure globale** : mesure des variations de pression de l'air contenu dans l'enceinte
- **Mesures locales** : mesure avec des Boîtes Collectrices de Fuite (BCF) munies d'un débitmètre

→ Quantification de trois débits :

$$Q_G$$

**Fuite globale**

$$Q_L = \sum_{BCF} Q_{BCF}$$

**Fuites locales**  
(fissures, lignes de porosité, singularités)

$$Q_D = Q_G - Q_L$$

**Fuite diffuse**  
(réseau poreux)



Mesure de fuites locales par BCF [Asali, 2016].

## Enjeux industriels et scientifiques

- Nécessité de développer une stratégie numérique permettant de prévoir l'évolution des fuites d'ouvrages de confinement dans le temps...
- ... dans l'optique d'évaluer les risques de dépassement de critères de fuite réglementaires...
- ...et de mieux prévoir d'éventuelles réparations/travaux de renforcement d'étanchéité

## 2. Méthodologie de prévision probabiliste de fuite

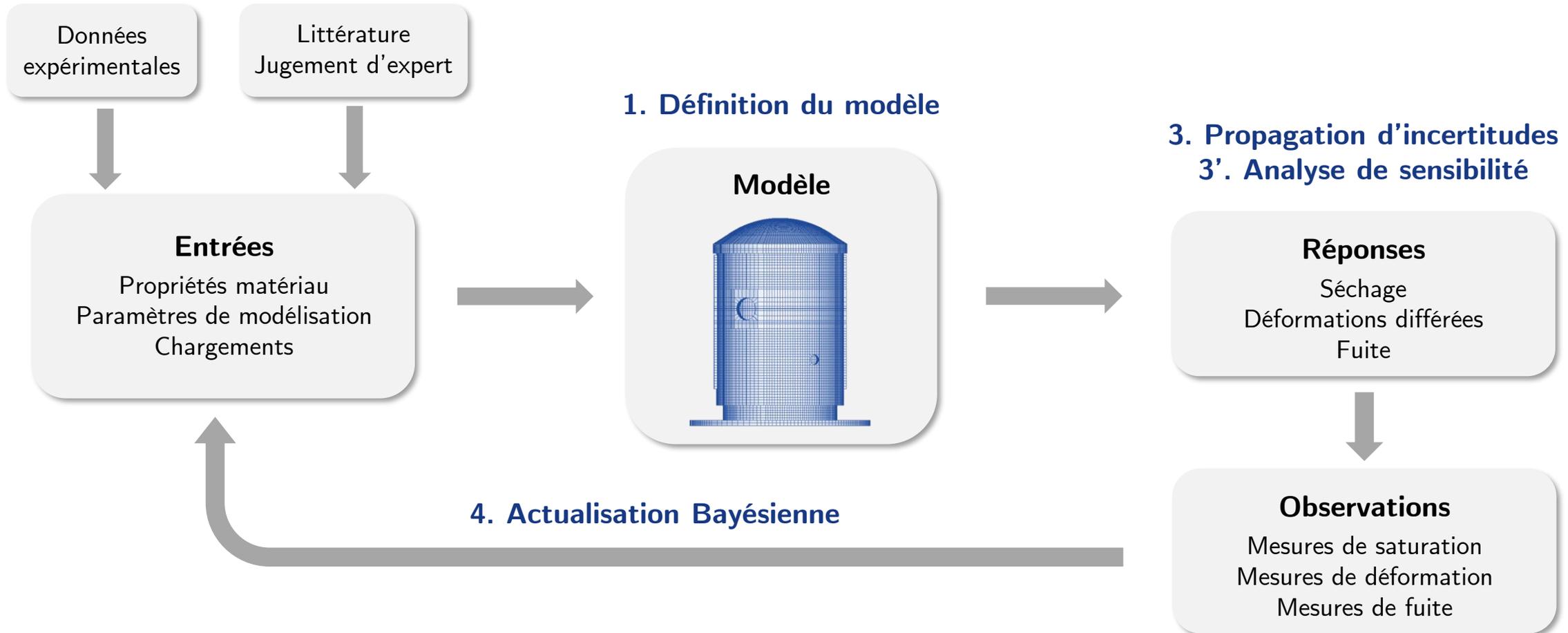
### Application aux enceintes de confinement



- Cadre général
- Description de la stratégie prévisionnelle
- Application aux enceintes de confinement

# Cadre général

## 2. Quantification d'incertitudes

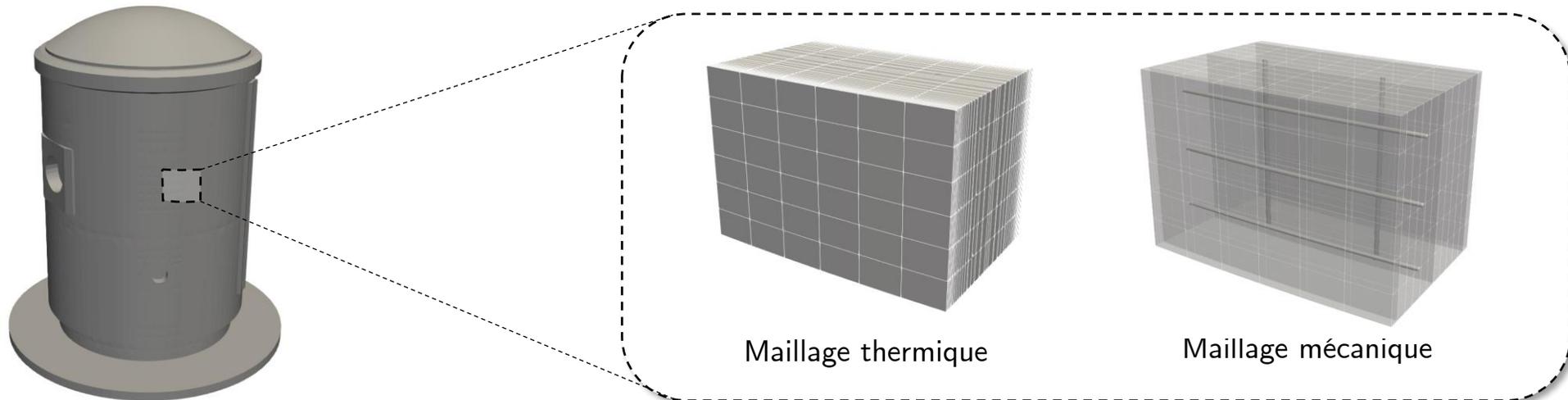


## Description du modèle physique

- Choix d'une stratégie faiblement couplée ou « chaînée » :



- **Échelle de modélisation** : Volumes Structuraux Représentatifs (VSR)



## Représentation en chaos polynomial de la réponse du modèle

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  espace de probabilité

- **Paramètres d'entrée** :  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$  v.a., de marginales  $(X_1, \dots, X_d)$  **mutuellement indépendantes**
- **Modèle** : application  $\mathcal{M} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$  supposée borélienne
- **Réponse** :  $Y := \mathcal{M}(X) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  v.a.

**On suppose que**  $Y \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}_X)$ . **Alors :**

→ il existe une base hilbertienne  $(\Psi_\alpha(X))_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$  de polynômes orthogonaux de  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}_X)$  telle que :

$$Y = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} y_\alpha \Psi_\alpha(X)$$

où  $\Psi_\alpha = \psi_{\alpha_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\alpha_d}^{(d)}$ , avec  $(\psi_{\alpha_i}^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$  base hilbertienne de polynômes orthogonaux de  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_{X_i})$

[Wiener, 1938] [Ghanem & Spanos, 1991] [Xiu & Karniadakis, 2002]

## Représentation en chaos polynomial de la réponse du modèle

- En pratique, on considère un chaos polynomial tronqué :

$$Y \approx \hat{Y}_{\mathcal{T}} := \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} y_{\alpha} \Psi_{\alpha}(X), \quad \mathcal{T} \subset \mathbb{N}^d, \quad \text{Card}(\mathcal{T}) < \infty$$

- Calcul non-intrusif des coefficients  $y_{\alpha} := \langle \mathcal{M}(X) | \Psi_{\alpha}(X) \rangle_X$  par régression ou par quadrature
- La fidélité de  $\hat{Y}_{\mathcal{T}}$  peut être quantifiée via des estimateurs d'erreur (erreur empirique, validation croisée,...)
- Construction de chaos polynomiaux creux (LASSO, LAR,...) : cas d'échantillons d'expérience de taille  $< \text{Card}(\mathcal{T})$   
[Efron et al., 2004] [Blatman & Sudret, 2011]

## Représentation en chaos polynomial de la réponse du modèle

- Résultats de convergence de la représentation en chaos polynomial vers le modèle :

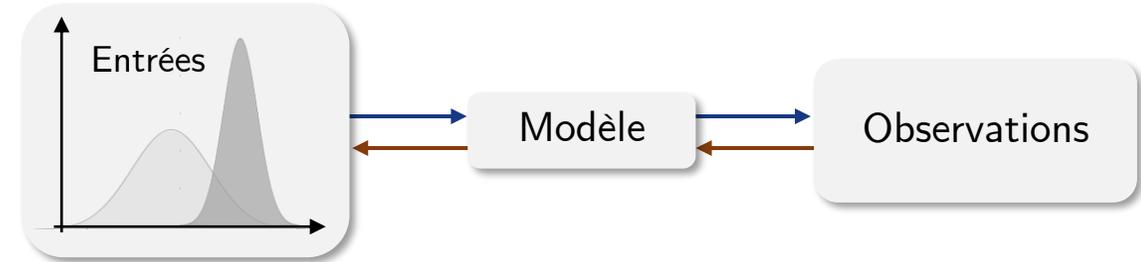
**(Xu & Guo, 2003)** Dans le cas d'une base formée de polynômes d'Hermite, on a, pour  $N \geq 1$  assez grand :

$$\left\| Y - \sum_{|\alpha| \leq N} y_\alpha \Psi_\alpha(X) \right\|_{\mathbb{L}^2(\pi_X)} \leq C_{d,k} N^{-\frac{k}{2}} \|Y\|_{\mathbb{H}^k(\pi_X)}$$

où  $C_{d,k} \geq 0$  est une constante ne dépendant que de  $d, k$ ,  $k$  désignant l'entier tel que  $Y \in \mathbb{H}^k(\pi_X)$ .

$\mathbb{H}^k(\pi_X)$  : espace de Sobolev muni de la norme définie par :  $\|f\|_{\mathbb{H}^k(\pi_X)}^2 := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\nabla^\alpha f\|_{\mathbb{L}^2(\pi_X)}^2$ ,  $\forall f \in \mathbb{H}^k(\pi_X)$

## Problèmes inverses Bayésiens : généralités



- Densité *a priori* des paramètres d'entrée :  $X \sim \pi_X$
- Modèle probabiliste des données d'observation :  $Y^{obs} | X = x \sim \pi_{Y^{obs} | X=x}$
- Données d'observation :  $\mathcal{Y}^{obs}$
- Vraisemblance :  $\mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; \cdot)$

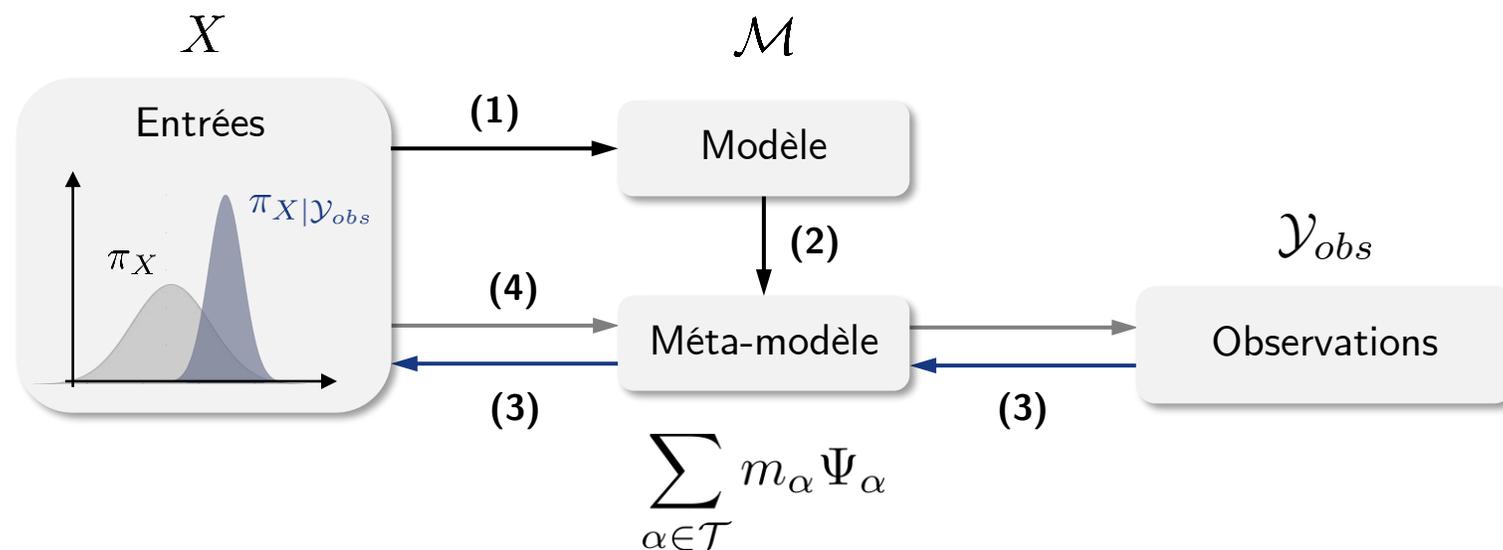
→ Densité *a posteriori* des paramètres d'entrée : 
$$\pi_{X | \mathcal{Y}^{obs}}(x) = \frac{\pi_X(x) \mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; x') d\pi_X(x')}$$

→ En pratique, échantillonnage possible via l'utilisation d'algorithmes de type Monte Carlo par Chaînes de Markov (MCMC)

[Metropolis, 1951] [Hastings, 1970] [Robert & Casella, 2004] [Duane et al., 2011]

- Principe de base : générer une chaîne de Markov « se comportant asymptotiquement » comme la densité cible

## Description de la méthodologie

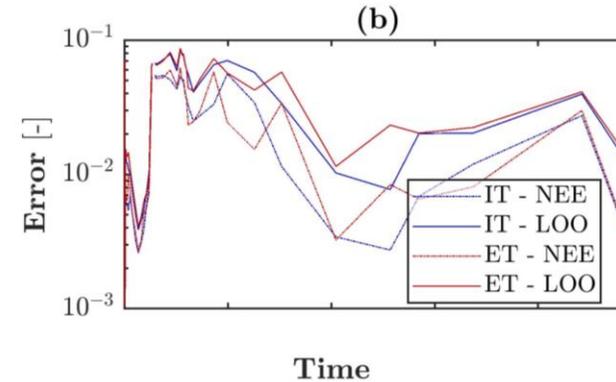
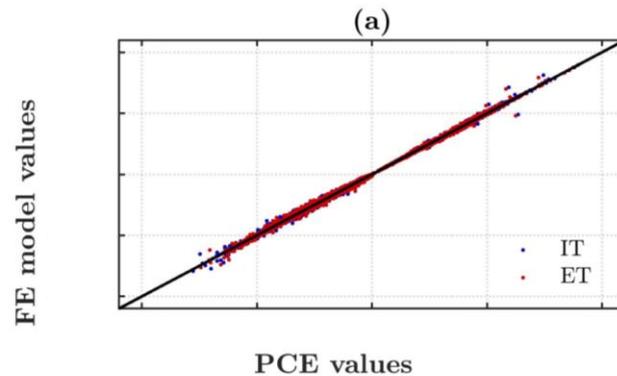


1. Échantillonnage des paramètres *a priori* et construction du plan d'expérience
2. Construction du chaos polynomial par régression (LAR)
3. Inversion Bayésienne par MCMC en utilisant le chaos polynomial  $\rightarrow$  échantillon des paramètres *a posteriori*
4. Propagation d'incertitudes à travers le chaos polynomial : prévisions *a posteriori*

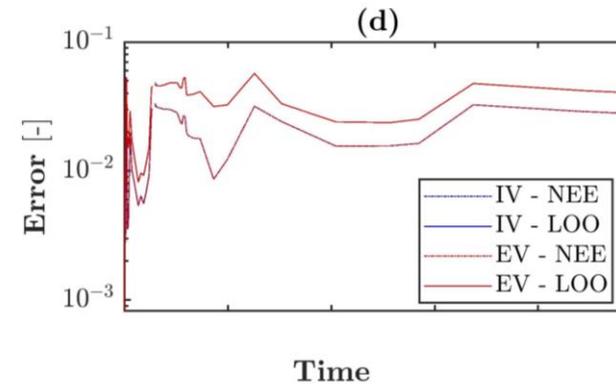
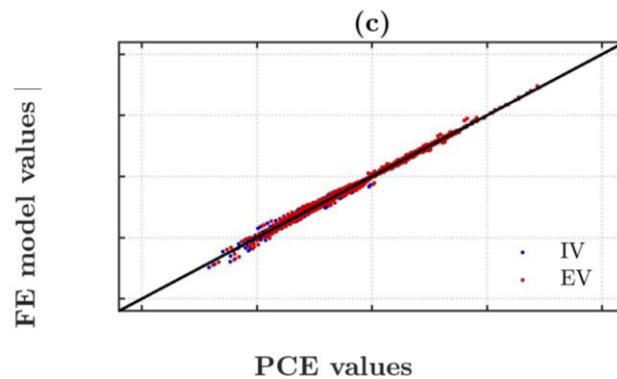
## Application aux enceintes de confinement

- Construction de chaos polynomiaux creux « *prior-based* » via une régression LAR [Blatman & Sudret, 2011]
- Plan d'expérience généré à l'aide d'une suite à discrédance faible (suite de Sobol')

Nuages des chaos polynomiaux des déformations

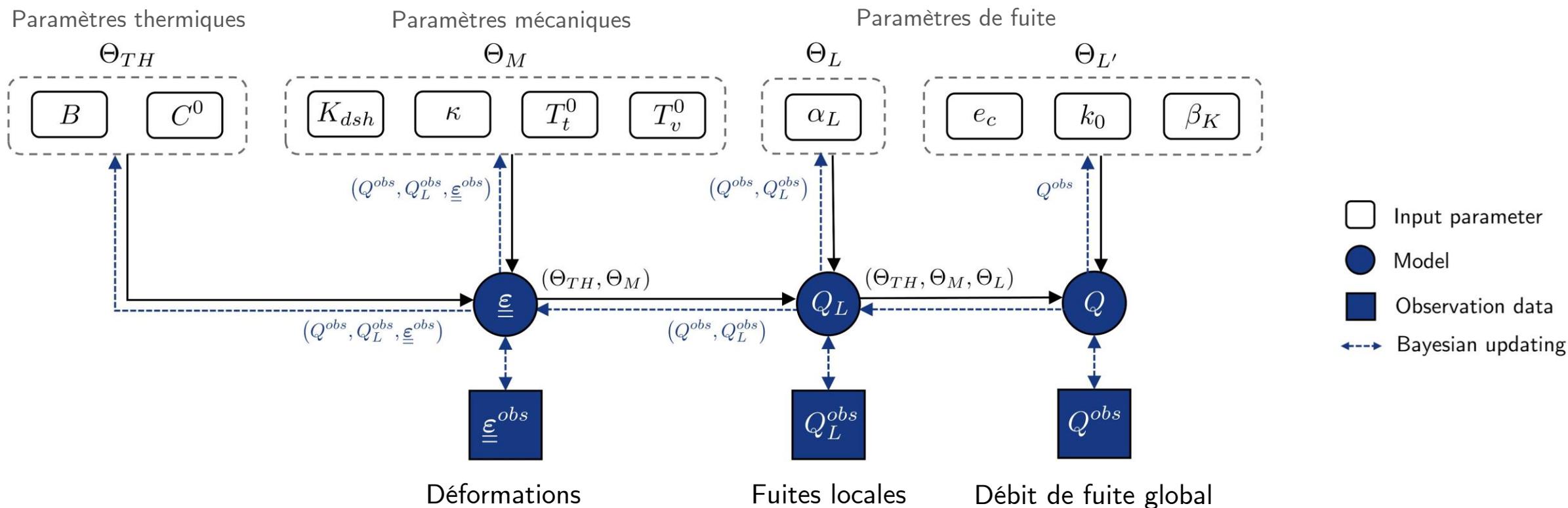


Évolution temporelle d'estimateurs d'erreur



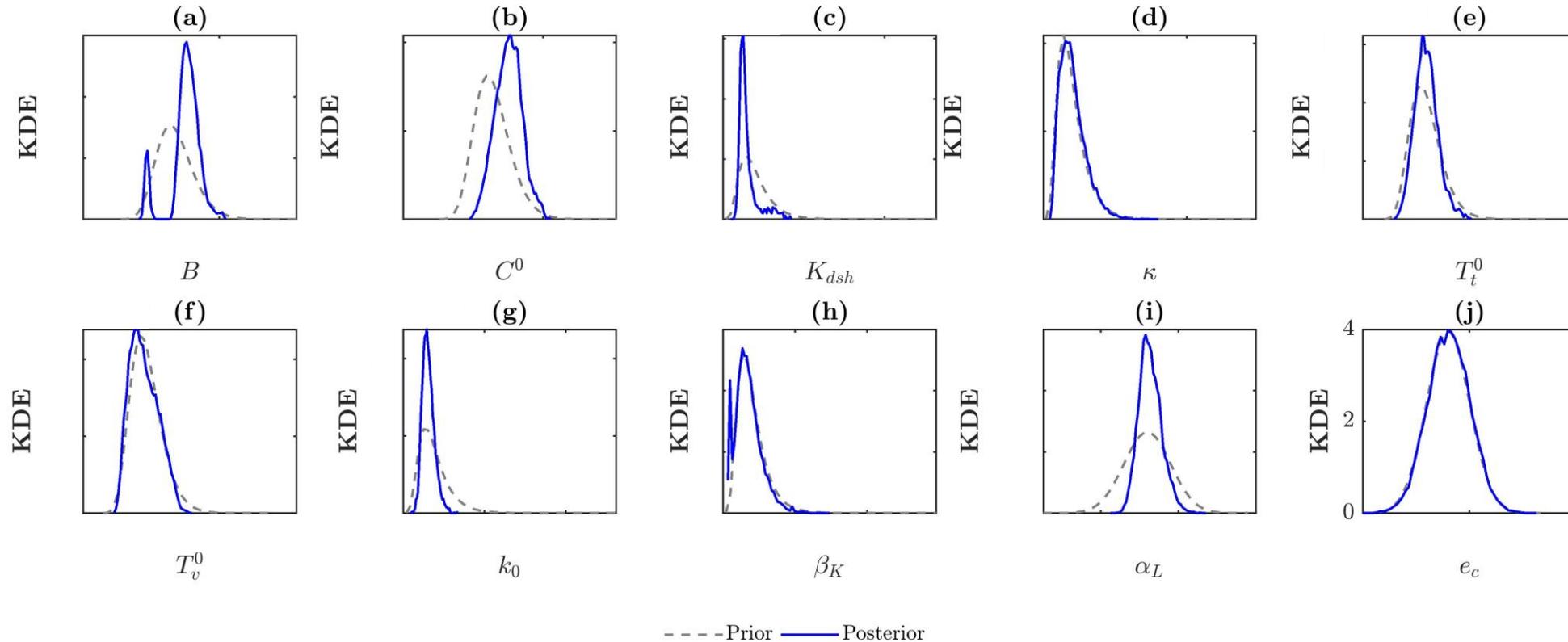
## Application aux enceintes de confinement

- Utilisation de données d'observation *in-situ* : mesures de déformations, mesures de fuites
- Plan d'actualisation des paramètres les plus influents :



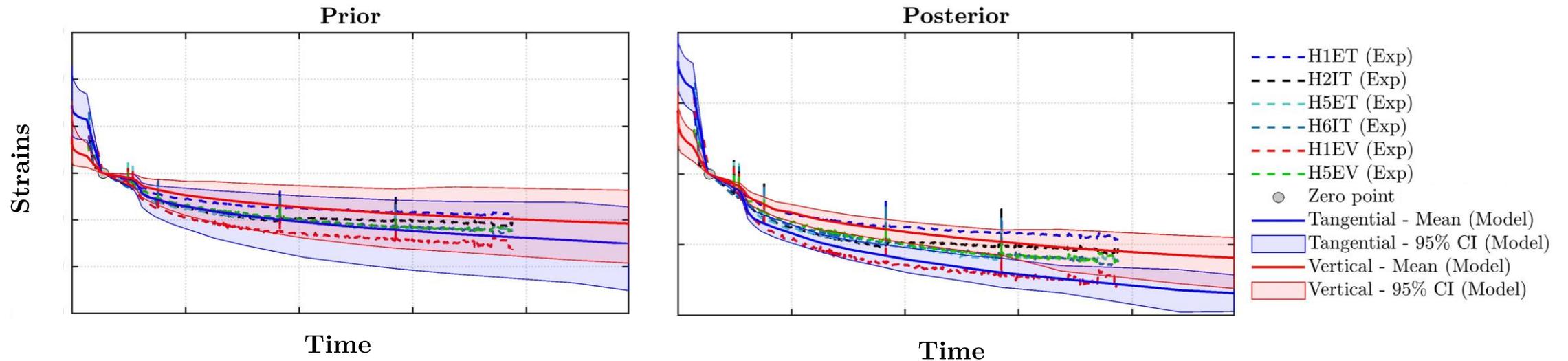
## Application aux enceintes de confinement

- Échantillonnage des paramètres *a posteriori* par simulation MCMC
- Utilisation d'une version adaptative de l'algorithme de Metropolis-Hastings [Haario et al., 2001]



## Application aux enceintes de confinement

- Actualisation des prévisions de déformations différées

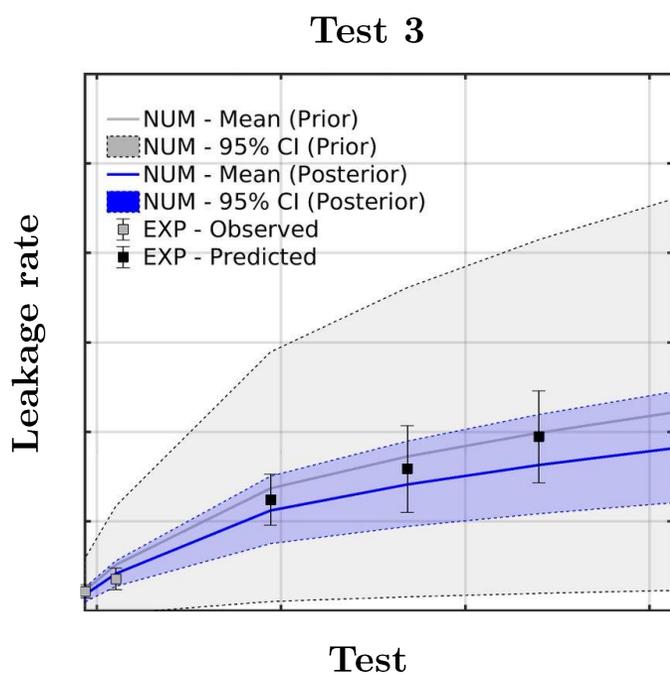


Prévision *a priori* des déformations différées

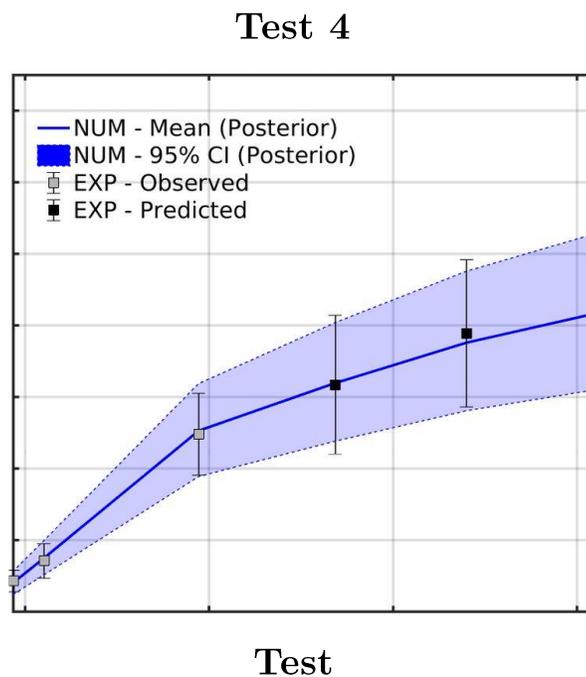
Prévision *a posteriori* des déformations différées

## Application aux enceintes de confinement

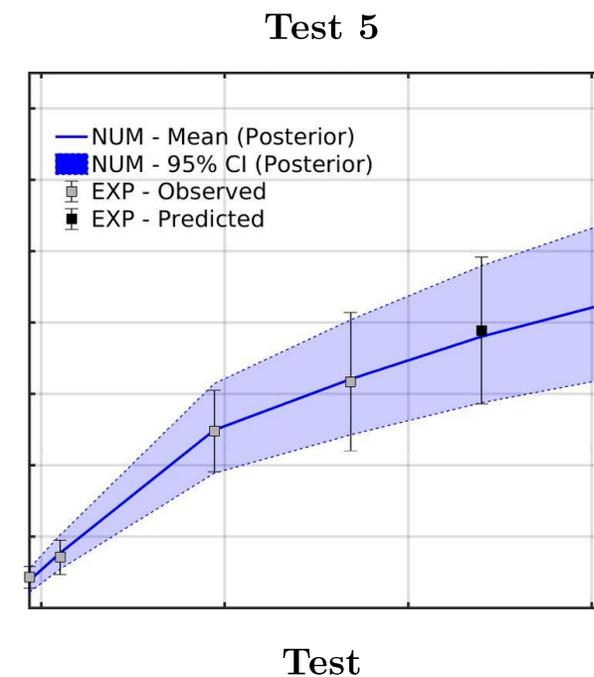
- Actualisation des prévisions du débit de fuite :



Prévision après actualisation sur les tests 1-2



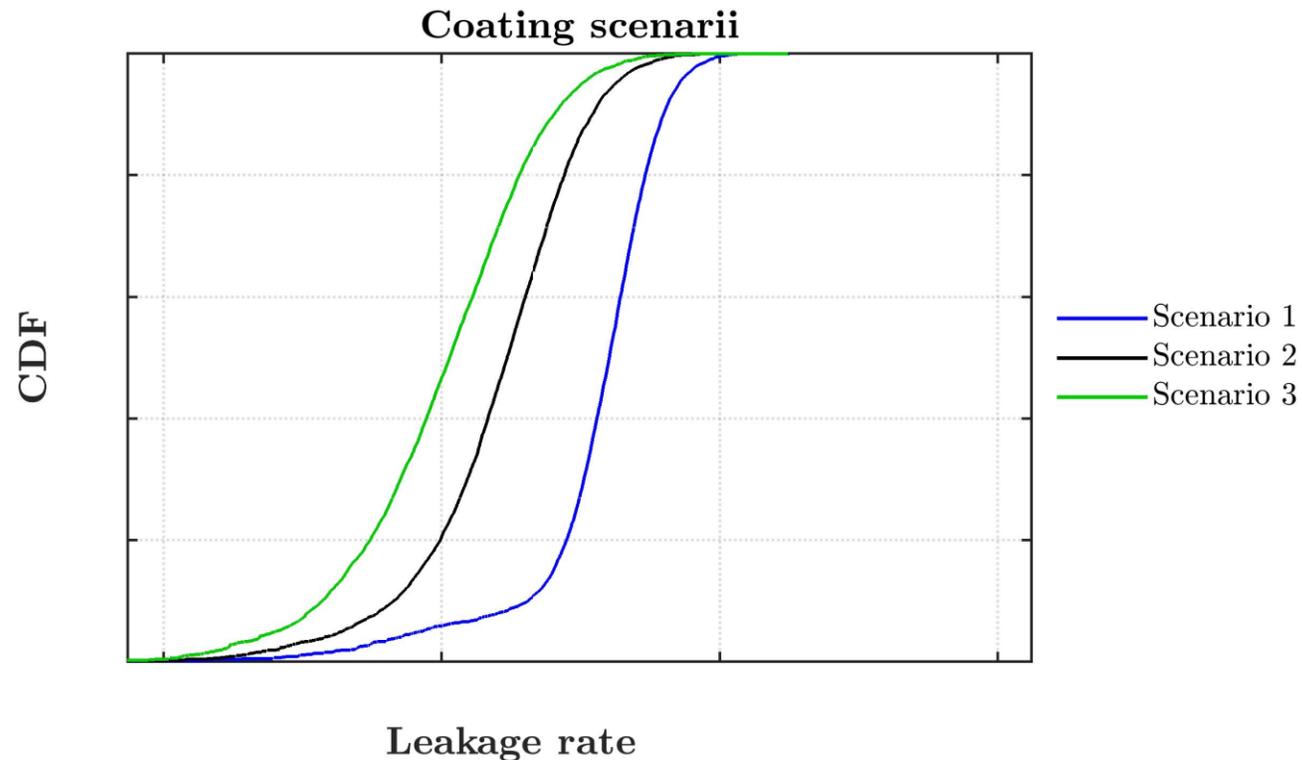
Prévision après actualisation sur les tests 1-3



Prévision après actualisation sur les tests 1-4

## Application aux enceintes de confinement

- Description fiabiliste du taux de fuite – Estimation de probabilités de dépassement de critères de fuite
- Étude de l'influence de différents scénarii de réparations sur le risque de dépassement



### 3. Discussion, problèmes méthodologiques



- Limites de la méthodologie prévisionnelle
- Approches alternatives de calcul Bayésien
- Conclusion, perspectives

## Limites de la méthodologie prévisionnelle

- Limites des algorithmes MCMC « classiques » : autocorrélation des échantillons générés, absence de critère de convergence théorique et nombre d'appels au modèle important

→ Développements d'algorithmes MCMC plus avancés : Adaptive MH, AIES, HMC, SGMCMC,...

[Haario et al., 2001] [Goodman & Weare, 2010] [Duane et al., 2011] [Parno & Marzouk, 2017] [Nemeth & Fearnhead, 2019]

- Malgré de nettes améliorations relatives à l'autocorrélation et à la dimensionnalité, les méta-modèles (notamment de type chaos polynomial) demeurent souvent usités dans le cas d'applications industrielles

[Berveiller et al., 2012] [Tagade & Choi, 2014] [Sraj et al., 2016]

→ Quelles sont les répercussions de l'erreur méta-modèle/modèle sur les résultats d'actualisation Bayésienne ?

## Inversion Bayésienne et chaos polynomiaux *prior-based*

$$Y = \mathcal{M}(X) \approx \hat{Y}_N := \mathcal{M}_N(X) = \sum_{|\alpha| \leq N} y_\alpha \Psi_\alpha(X) \xrightarrow{\text{Th. de Bayes}}$$

↓ Th. de Bayes

$$\pi_{X|\mathcal{Y}^{obs}} = \frac{\pi_X(x) \mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; x)}{Z}$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; x) = \prod_{y \in \mathcal{Y}^{obs}} \varphi_y(y - \mathcal{M}(x))$$

$$\pi_{X|\mathcal{Y}^{obs}}^{(N)} = \frac{\pi_X(x) \mathcal{L}^{(N)}(\mathcal{Y}^{obs}; x)}{Z^{(N)}}$$

$$\mathcal{L}^{(N)}(\mathcal{Y}^{obs}; x) = \prod_{y \in \mathcal{Y}^{obs}} \varphi_y(y - \mathcal{M}_N(x))$$

**(D.R. 2020)** Si  $\|Y - \hat{Y}_N\|_{\mathbb{L}^2(\pi_X)} = \mathcal{O}(N^{-\gamma})$  avec  $\gamma > 0$  et si pour tout  $y \in \mathcal{Y}^{obs}$ ,

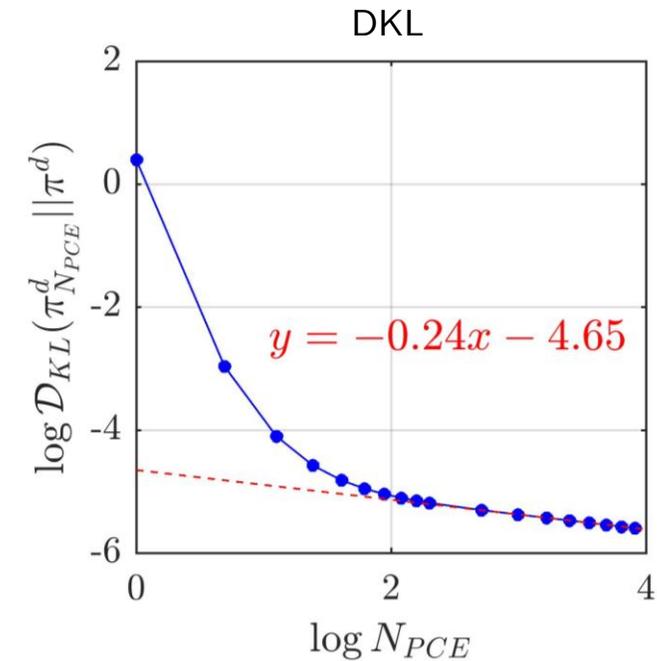
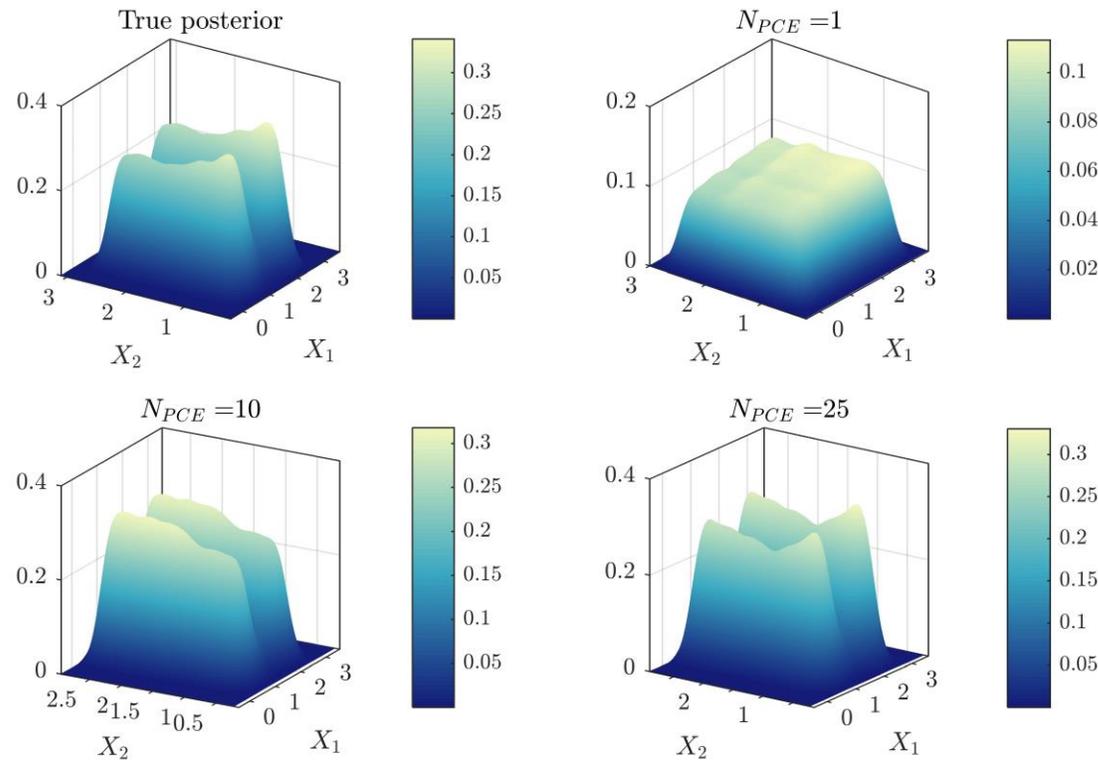
l'application  $\varphi_y$  est lipschitzienne, alors :

$$d_{TV} \left( \pi_{X|\mathcal{Y}^{obs}}^{(N)}, \pi_{X|\mathcal{Y}^{obs}} \right) = \mathcal{O}(N^{-\gamma})$$

$d_{TV}(\nu_\rho, \nu_\pi) := \int_{\mathbb{R}^d} |\rho(x) - \pi(x)| dx$  : distance en variation totale entre deux mesures de probabilité  $\nu_\rho(dx) = \rho(x)dx$  et  $\nu_\pi(dx) = \pi(x)dx$

## Inversion Bayésienne et chaos polynomiaux *prior-based*

- Influence de la non-linéarité du modèle : cas de la fonction d'Ishigami



Densité *a posteriori* de référence (MCMC direct) vs. densité approchée par *prior based* PCE-MCMC

## Inversion Bayésienne et chaos polynomiaux *prior-based*

- Effet du caractère informatif des données d'observations
- Résultats théoriques dans le cas d'un modèle d'erreur d'observation/modèle additif Gaussien [Lu et al., 2014]

### Hypothèses et notations :

$\pi_X^\varepsilon$  : prior de moyenne nulle et de variance  $\varepsilon > 0$

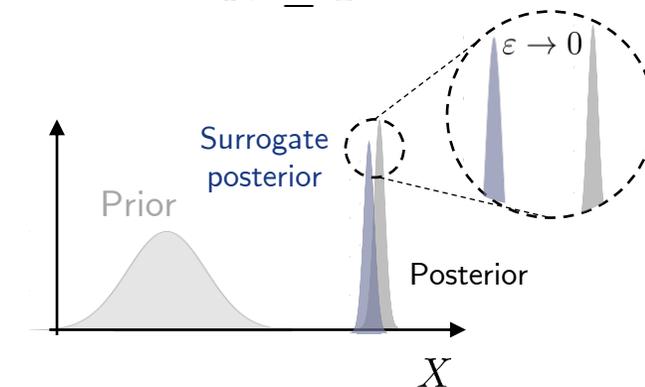
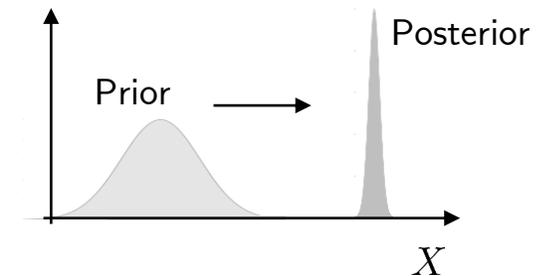
$\mathcal{Y}^{obs}$  : données d'observations

$$\pi_{X|\mathcal{Y}^{obs}}^\varepsilon(x) \propto \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}F(x)\right) = \exp\left[-\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{\|\mathcal{Y}^{obs} - \mathcal{M}(x)\|^2}{\sigma^2} + \|x\|^2\right)\right] : \textit{posterior}$$

$$\pi_{X|\mathcal{Y}^{obs}}^{\varepsilon,N}(x) \propto \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}F_N(x)\right) : \textit{posterior approchée à partir d'un chaos } \mathcal{M}_N \textit{ tronqué à un ordre } N \geq 1$$

**(Lu et al. 2014)** Si  $F(x_N^*) > \min F$ , avec  $x_N^* := \arg \min_x F_N(x)$ , alors :

$$\mathcal{D}_{KL}\left(\pi_{X|\mathcal{Y}^{obs}}^{\varepsilon,N} \parallel \pi_{X|\mathcal{Y}^{obs}}^\varepsilon\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty$$



## Approches Bayésiennes spectrales

- **Idée principale** : sous l'hypothèse  $\mathcal{L} \in \mathbb{L}^2(\pi_X)$ , développement de la vraisemblance en chaos polynomial *prior-based* :

$$\mathcal{L} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \ell_\alpha \Psi_\alpha \approx \hat{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}} := \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \ell_\alpha \Psi_\alpha \quad [\text{Nagel \& Sudret, 2016}]$$

- Moments, densités marginales a posteriori explicitement calculables à partir des coefficients du chaos. En particulier :

$$Z := \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; x) d\pi_X(x) = \ell_0$$

- Critère de convergence donné par l'erreur de validation du chaos polynomial

- Absence d'auto-corrélation des échantillons générés, approche « *sample-free* »

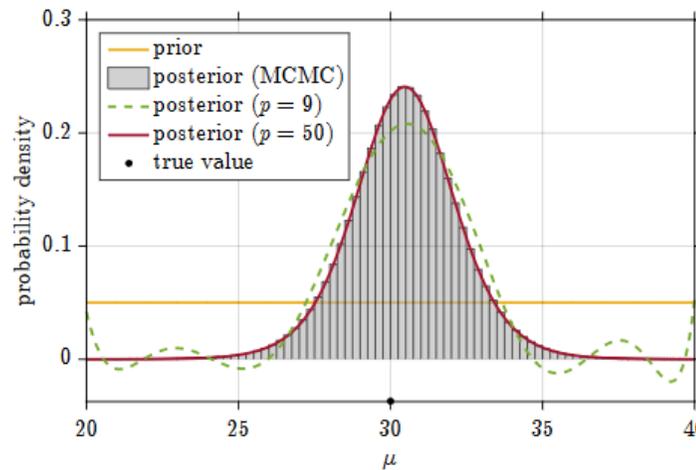
- Possibilité d'avoir recours à une densité dite *auxiliaire*, en développant  $\mathcal{G} := \frac{\pi_X \mathcal{L}}{g}$ , avec  $g$  densité ne s'annulant jamais

## Approches Bayésiennes spectrales

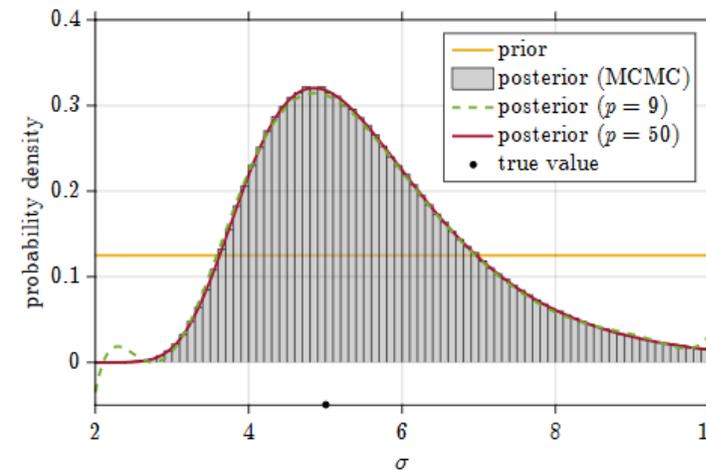
- **Idée principale** : sous l'hypothèse  $\mathcal{L} \in \mathbb{L}^2(\pi_X)$ , développement de la vraisemblance en chaos polynomial *prior-based* :

$$\mathcal{L} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \ell_\alpha \Psi_\alpha \approx \hat{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}} := \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \ell_\alpha \Psi_\alpha \quad [\text{Nagel \& Sudret, 2016}]$$

→ Cependant, les résultats ne sont satisfaisants qu'à partir d'un ordre polynomial sensiblement élevé :



(a) Mean value  $\mu$ .



(b) Standard deviation  $\sigma$ .

Résultats d'inférence Bayésienne spectrale obtenus dans le cas d'un fitting Gaussien 2D – Tiré de [Nagel & Sudret, 2016]

## Approches alternatives de calcul Bayésien

- Proposition d'approches alternatives basées sur l'approximation de la vraisemblance :

→ Utilisation d'approximations tensorielles de bas rang : limitation des effets de la dimensionnalité

$$\mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; X) \approx \hat{\mathcal{L}}_{R,p}(\mathcal{Y}^{obs}; X) = \sum_{l=1}^R b_l \left( \prod_{i=1}^d \left( \sum_{k=0}^{p_i} z_{k,l}^{(i)} \psi_k^{(i)}(X_i) \right) \right) \quad [\text{D.R., 2020}]$$

Coefficients
Polynômes orthogonaux de  $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_{X_i})$

→ Approximation de la log-vraisemblance par un modèle de régression par processus Gaussien (krigeage)

$$\log \mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; x) \approx \underbrace{\langle \beta | f(x) \rangle}_{\text{Tendance}} + \underbrace{Z(x)}_{\text{Processus Gaussien centré stationnaire du second ordre}} \quad [\text{D.R., 2020}]$$

## Inversion Bayésienne par approximation de la vraisemblance

### Méthodologie :

Entrées : densité *a priori*  $\pi$ , vraisemblance  $\mathcal{L}$

1. Estimation du maximum *a posteriori*  $\hat{\mu}_{MAP}$  via la résolution du problème d'optimisation :

$$\hat{\mu}_{MAP} = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^d} \pi(x) \mathcal{L}(x)$$

2. Définition d'une densité auxiliaire  $\hat{\pi}$  par translation de  $\pi$  :  $\hat{\pi}(x) := \pi(x - \hat{\mu}_{MAP})$

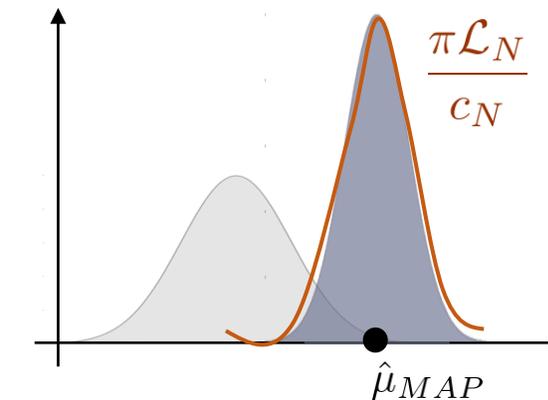
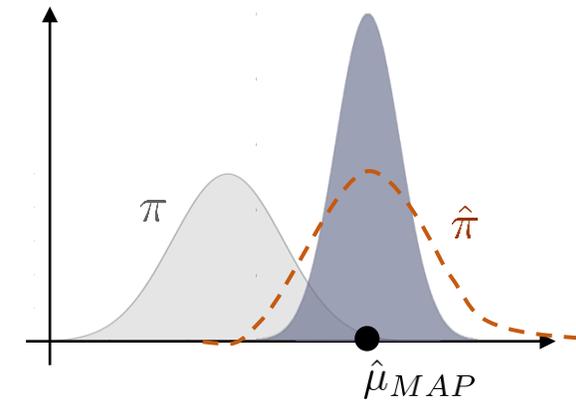
3. Génération d'un échantillon de taille  $N \geq 1$  distribué selon  $\hat{\pi}$

4. Approximation de la vraisemblance par un méta-modèle construit sur l'échantillon :  $\mathcal{L} \approx \hat{\mathcal{L}}_N$

5. Calcul de la constante de normalisation par quadrature :

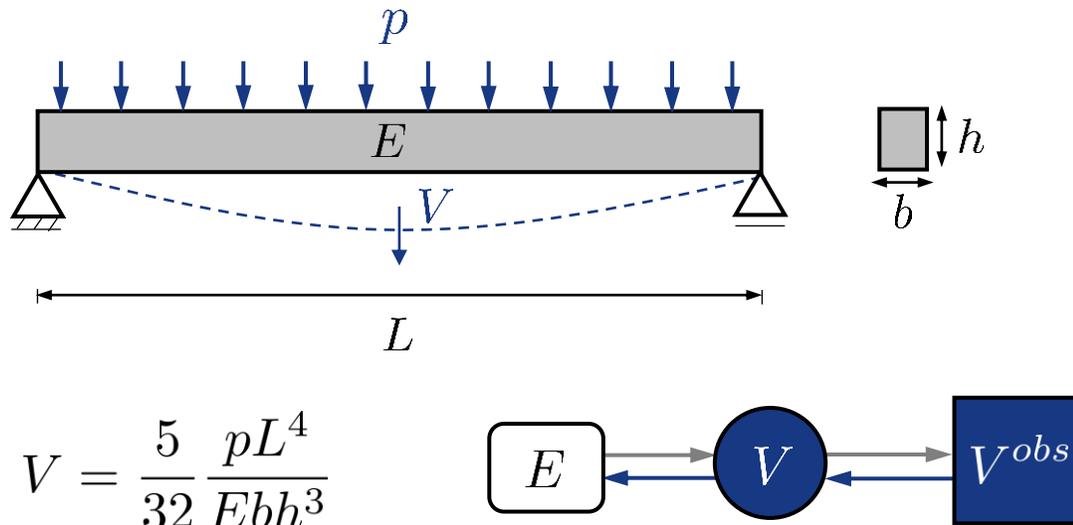
$$c_N := \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mathcal{L}}_N(x) \pi(x) dx$$

(ou échantillonnage de la densité *a posteriori* approchée par MCMC à partir de la vraisemblance approchée)

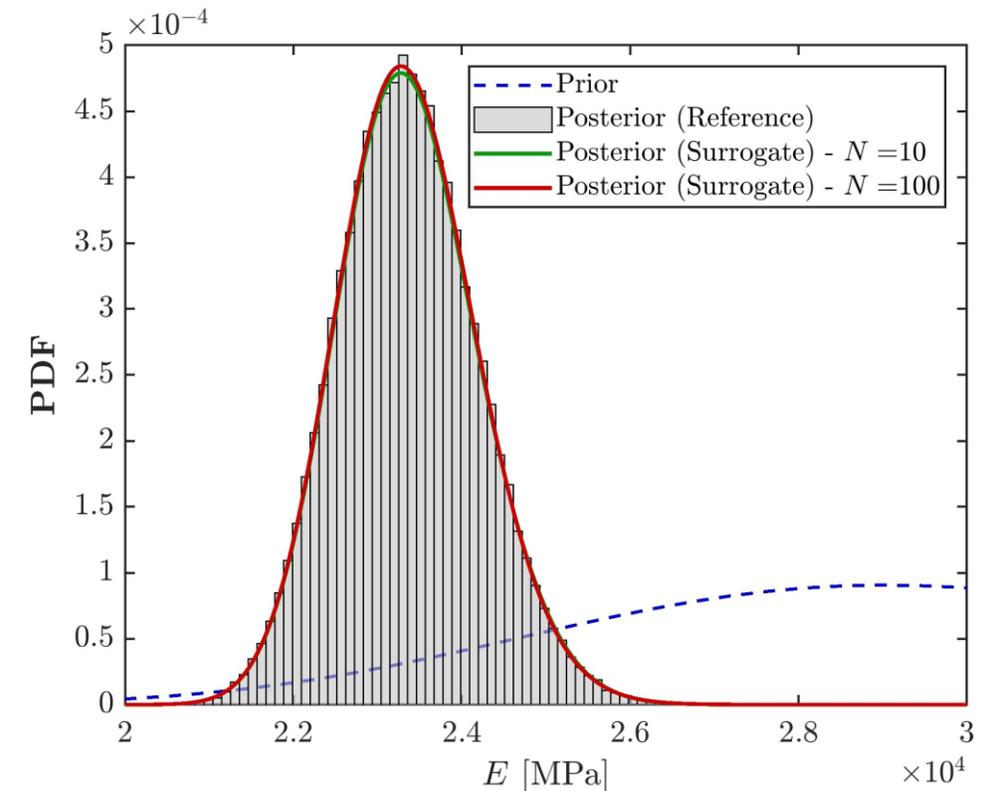


## Inversion Bayésienne par approximation de la vraisemblance

- Application à une poutre uniformément chargée : calibration Bayésienne du module d'Young

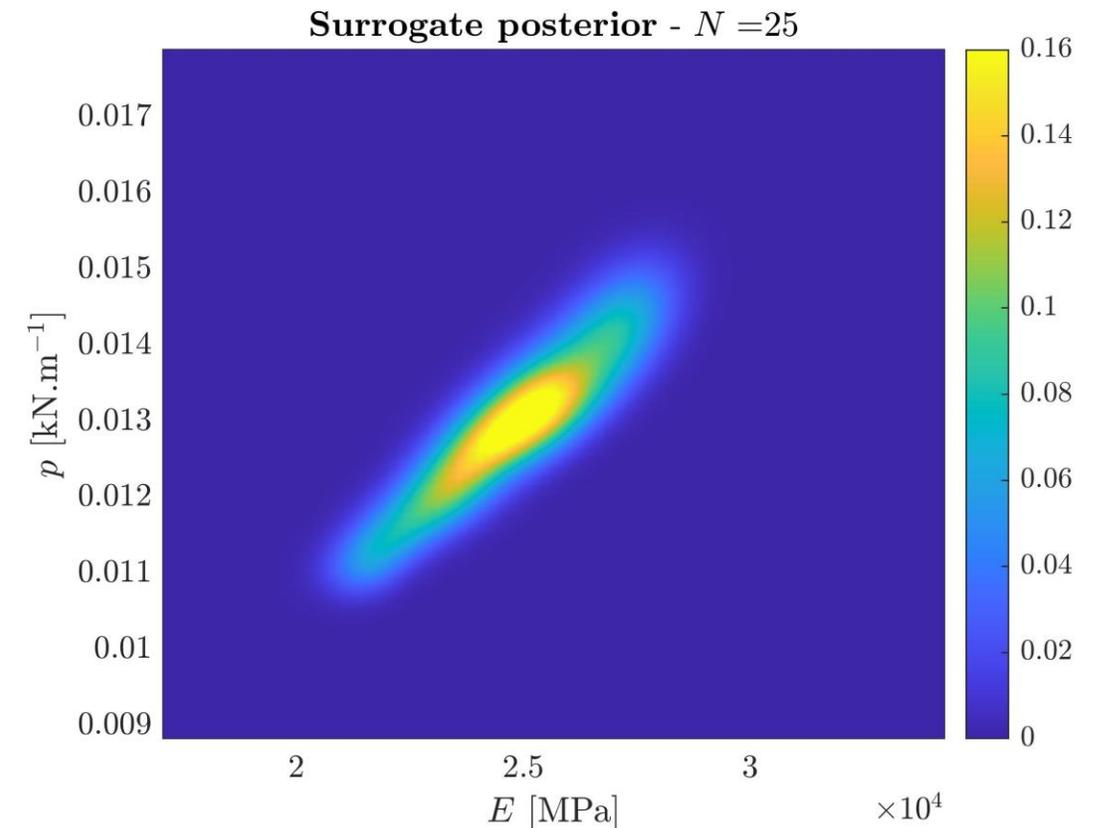
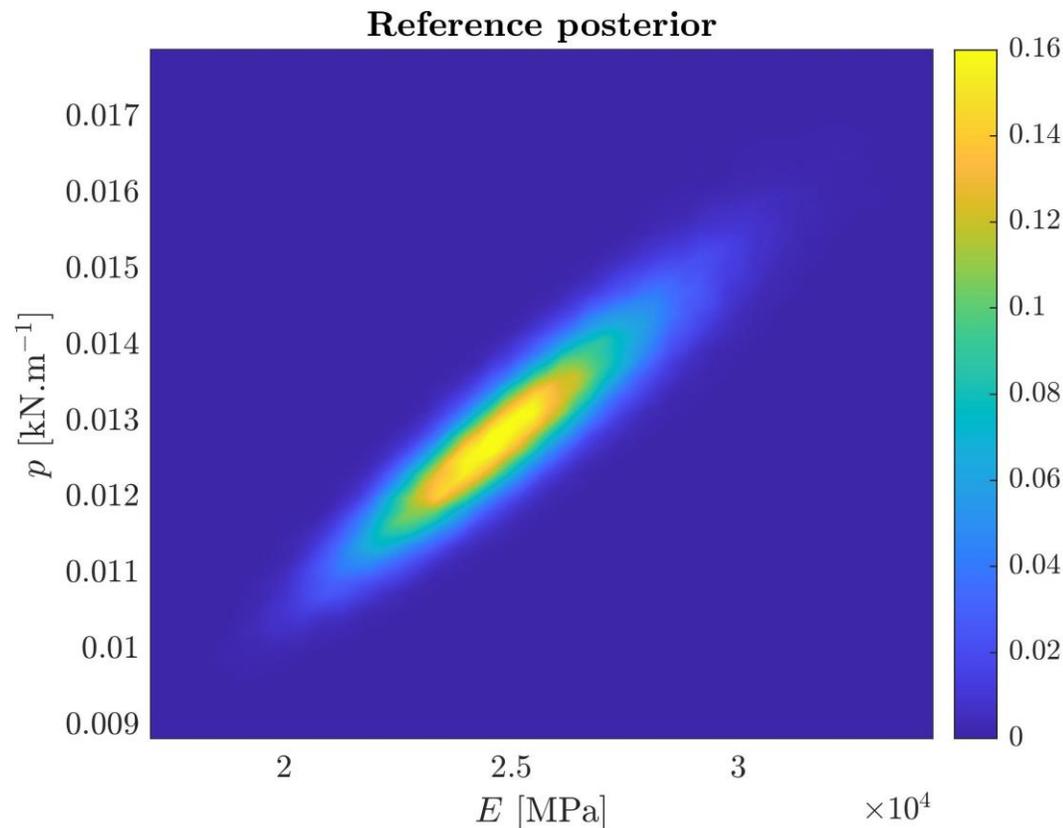


- Approximation de la log-vraisemblance par krigeage (10,100 points)
- Comparaison des résultats à une référence MCMC ( $10^6$  appels)



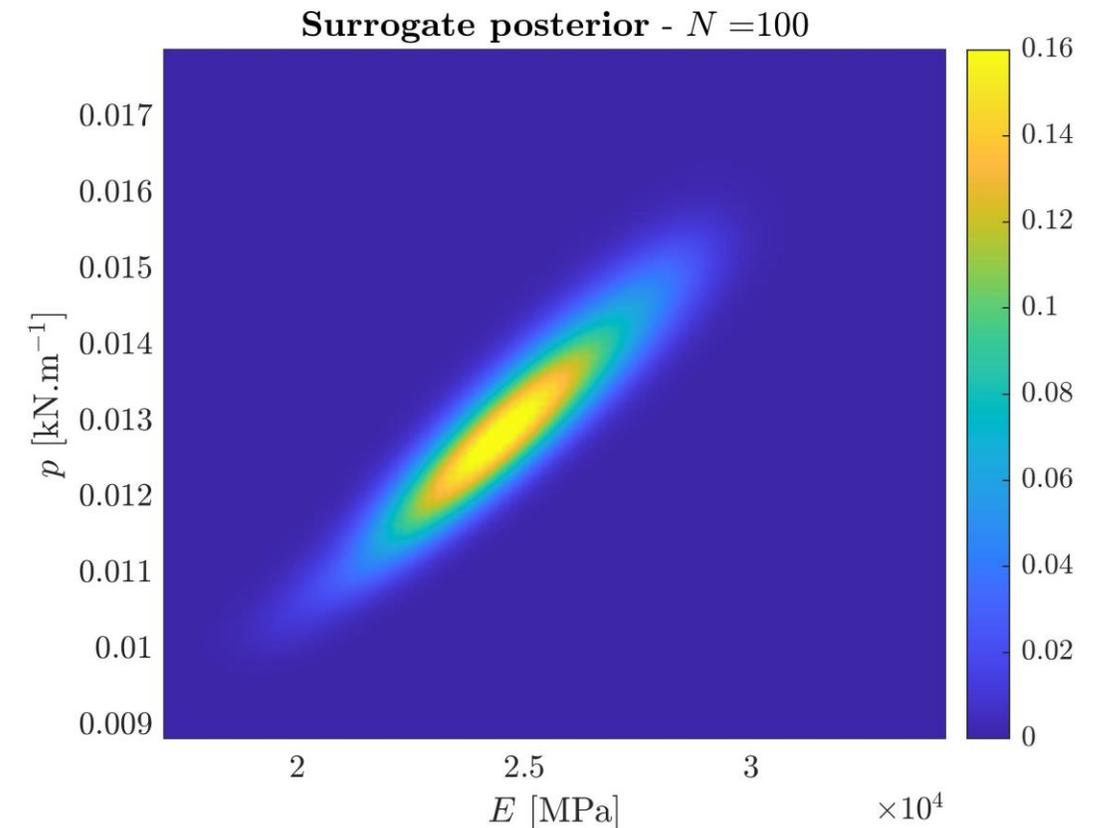
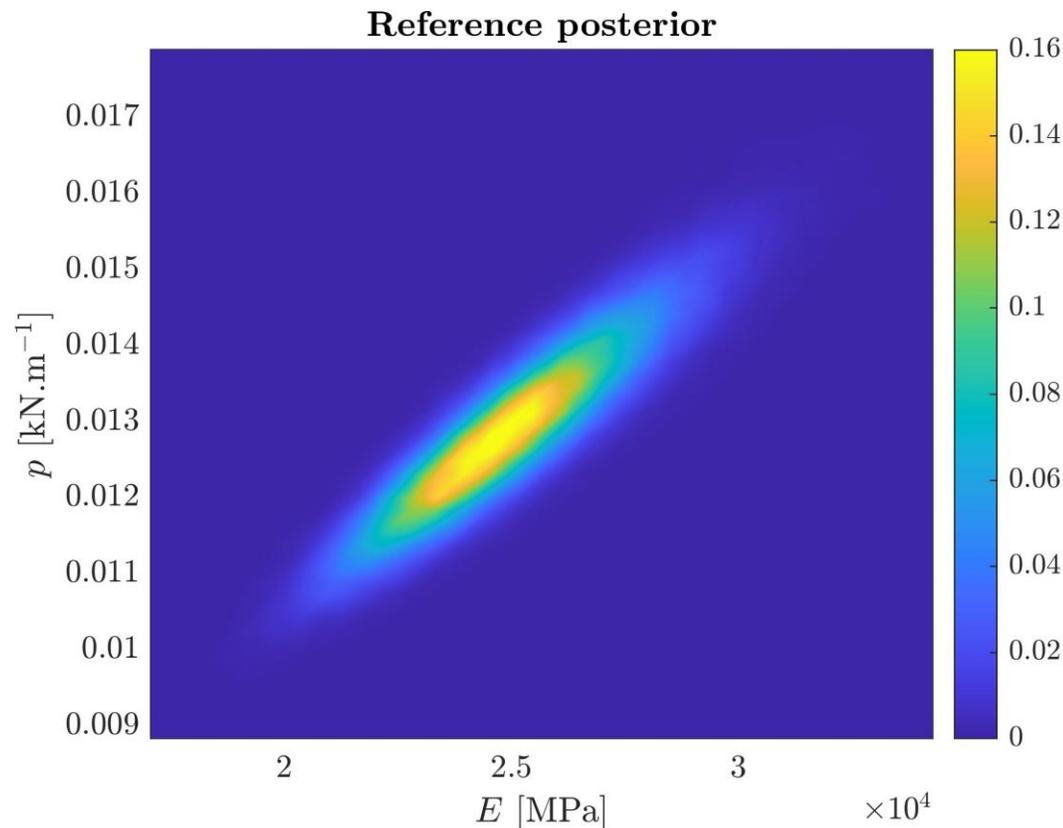
## Inversion Bayésienne par approximation de la vraisemblance

- Cas en dimension 2 : calibration Bayésienne du module d'Young et du chargement



## Inversion Bayésienne par approximation de la vraisemblance

- Cas en dimension 2 : calibration Bayésienne du module d'Young et du chargement



## Conclusions, perspectives

- Algorithmes de chaos polynomiaux creux : permet l'accès à des méta-modèles fidèles à un coût réduit (~12 h)
- Résultats relativement satisfaisants en termes de prévisions des fuites
- Paramètres d'entrée supposés indépendants : prise en compte des dépendances en utilisant des copules
- Étude de l'applicabilité d'approches alternatives de calcul Bayésien à des cas d'étude industriels

## Conclusions, perspectives

- Piste alternative : inférence Bayésienne par transport optimal [Villani, 2009], [El Moselhy & Marzouk, 2012], [Marzouk et al., 2016]

→ **Principe** :  $X \sim \pi$ ,  $T \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  bijective

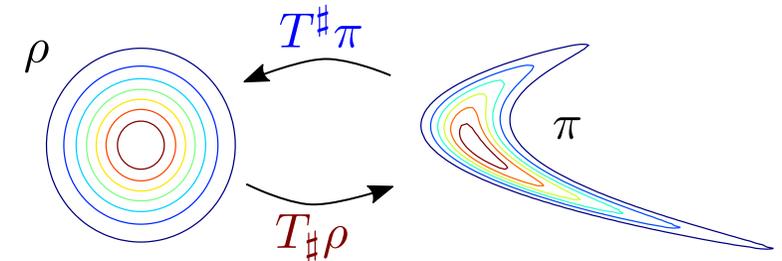
$$\tilde{X} := T(X) \sim \pi_T \quad \pi_T(\tilde{x}) = |\det \nabla T(T^{-1}(\tilde{x}))|^{-1} \pi(T^{-1}(\tilde{x}))$$

→ Trouver une application  $T$  transportant la prior vers la posterior

→ En pratique, on cherche  $T$  via une formulation variationnelle :

$$T = \arg \min_{T_* \in \mathbb{T}} \mathcal{D}_{KL}(\pi || \pi_{T_*^{-1}}(\cdot | \mathcal{Y}^{obs}))$$

en considérant des formes paramétriques de transport (e.g. de type chaos polynomiaux)



**Merci pour votre attention !**



## Diapositives annexes



## Modélisation du vieillissement des ouvrages de confinement

- Comportement thermo-hydrrique du béton



- Hydratation du béton au jeune âge :  $\xi(t) = \frac{t}{t + b}$
- Transferts de chaleur :  $\rho_c c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_c \nabla^2 T$
- Séchage :  $\frac{\partial C_w}{\partial t} = \nabla \cdot (D(C_w, T) \nabla C_w)$  avec  $D(C_w, T) = A \frac{T}{T_d^{ref}} \exp \left[ -\frac{Q_d}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_d^{ref}} \right) \right] \exp(BC_w)$

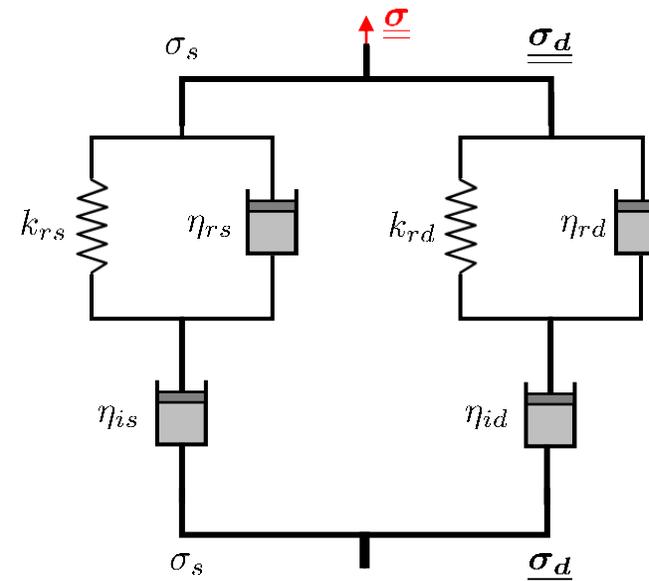
[Mensi, 1988] [Granger, 1995]

# Modélisation du vieillissement des ouvrages de confinement

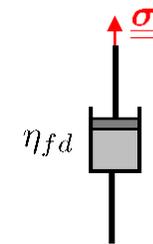
- **Comportement mécanique du béton**



- Modèles de retrait endogène et de dessiccation
- Modèle de fluage propre
- Modèle de fluage de dessiccation



Modèle de fluage propre  
[Foucault et al., 2012]



Modèle de fluage de dessiccation  
[Bazant & Chern, 1985]

## Modélisation du vieillissement des ouvrages de confinement

- Comportement de transfert du béton : fuite globale



- Hypothèse : principe de superposition applicable aux contributions des fuites locales et des fuites diffuses

$$Q = Q_L + Q_D$$

Fuites locales                      Fuites diffuses

- Prédiction du taux de fuite VD3 de BEL1
- Retour sur VeRCoRs : influence des données
- Autres travaux, perspectives, discussion

- Description du modèle physique
- Actualisation Bayésienne « multi-modèle »
- Résultats

## Modélisation du vieillissement des ouvrages de confinement

- Comportement de transfert du béton : fuites locales

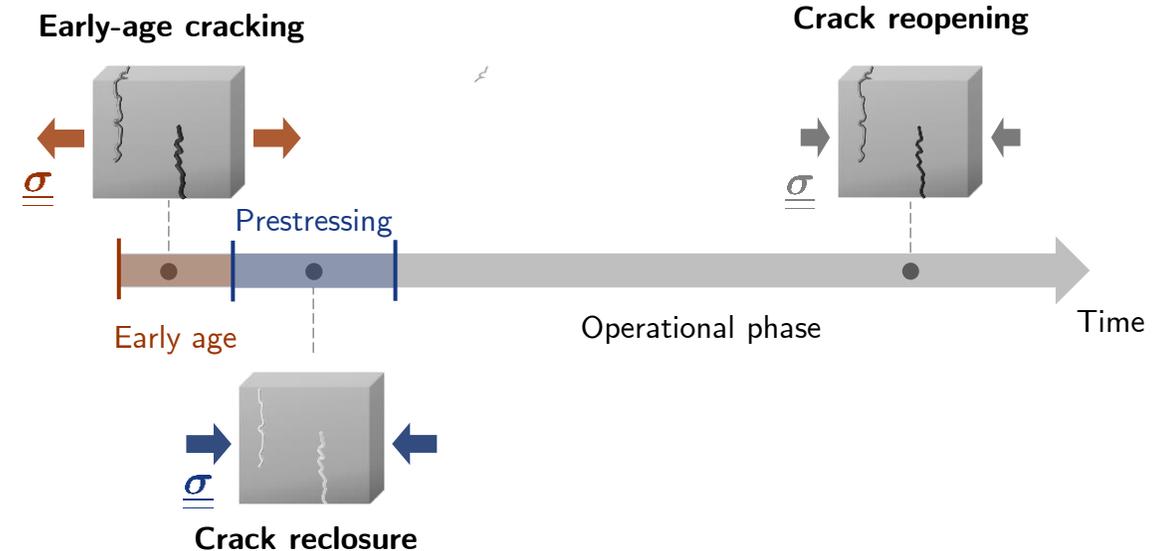


- Modèle phénoménologique d'évolution des fuites **locales** de l'enceinte :

$$Q_L = \langle \alpha_L \Pi + \beta_L \rangle_+$$

Débit associé aux fuites locales

Pertes de précontrainte relatives moyennes



## Modélisation du vieillissement des ouvrages de confinement

- Comportement de transfert du béton : fuites diffuses

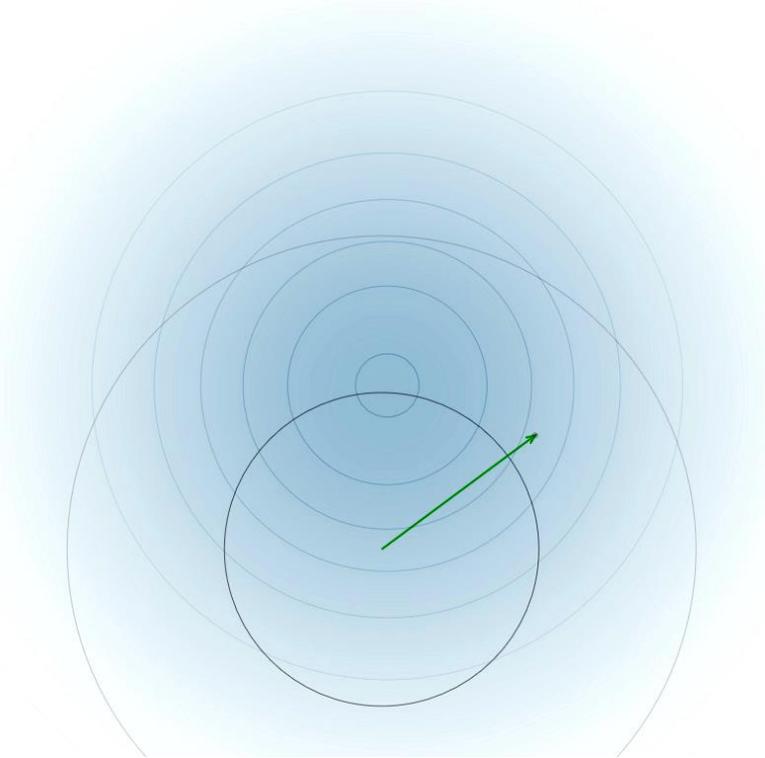


- Modèle macroscopique de diffusion de gaz en milieu poreux :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{k_D}{\mu_{air}} p \nabla p \right)$$

$$k_D = k_0 \sqrt{1 - S_w} \left( 1 - S_w^{\frac{1}{c_k}} \right)^{2c_k} \left( 1 + \frac{\beta_K}{p_m} \right)$$

# Principe de base des algorithmes MCMC

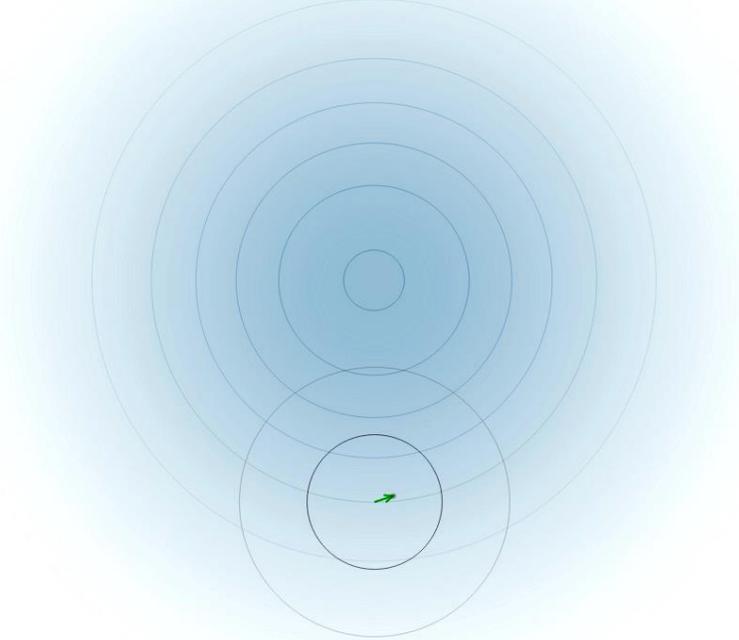


- Algorithme : RWMH
- Densité cible : Gaussienne
- Ecart-type « proposal » : 1

## Algorithme *Random Walk Metropolis Hastings*

1. Tirer un point initial  $x_0$
2. **À chaque pas**  $n$  : on tire un point « candidat »  $\tilde{x} = x_{n-1} + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \sim q_{RW}$
3. On calcule la probabilité d'acceptance suivante :  $\alpha(x_{n-1}; \tilde{x}) := \min \left( 1, \frac{\mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; \tilde{x})}{\mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; x_{n-1})} \right)$
4. On pose  $x_n := \tilde{x}$  avec une probabilité  $\alpha(x_{n-1}; \tilde{x})$  , et  $x_n := x_{n-1}$  sinon

# Principe de base des algorithmes MCMC



- Algorithme : RWMH
- Densité cible : Gaussienne
- Ecart-type « proposal » : 0.1

## Algorithme *Random Walk Metropolis Hastings*

1. Tirer un point initial  $x_0$
2. **À chaque pas**  $n$  : on tire un point « candidat »  $\tilde{x} = x_{n-1} + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \sim q_{RW}$
3. On calcule la probabilité d'acceptance suivante :  $\alpha(x_{n-1}; \tilde{x}) := \min\left(1, \frac{\mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; \tilde{x})}{\mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; x_{n-1})}\right)$
4. On pose  $x_n := \tilde{x}$  avec une probabilité  $\alpha(x_{n-1}; \tilde{x})$  , et  $x_n := x_{n-1}$  sinon

# Principe de base des algorithmes MCMC

- Algorithme : RWMH
- Densité cible : Banane (!?)
- Ecart-type « proposal » : 1

## Utilisation d'approximations tensorielles de bas rang

**Idée** : limiter les effets de la dimensionnalité en ayant recours à une approximation tensorielle de bas rang :

$$\mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; X) \approx \hat{\mathcal{L}}_{R,p}(\mathcal{Y}^{obs}; X) = \sum_{l=1}^R b_l \left( \prod_{i=1}^d \left( \sum_{k=0}^{p_i} z_{k,l}^{(i)} \psi_k^{(i)}(X_i) \right) \right)$$

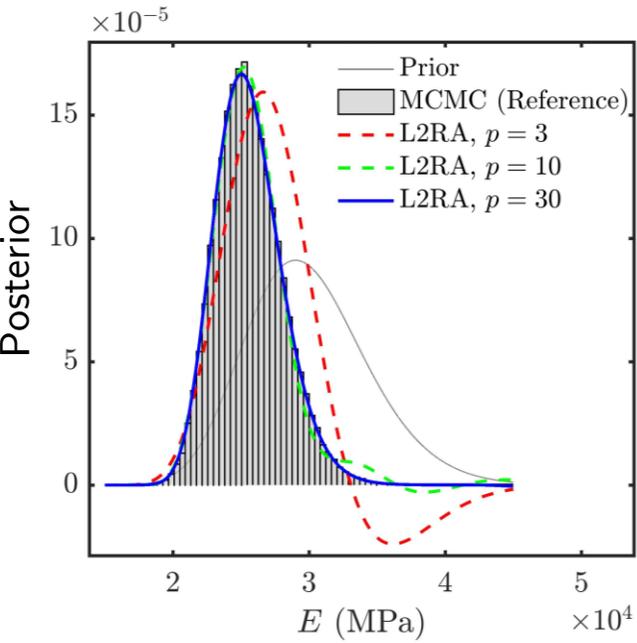
Coefficients Polynômes orthogonaux de  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_{X_i})$

- Nombre de coefficients : croît **linéairement** avec la dimension (et l'ordre polynomial)
- Coefficients calculables via un schéma des moindres carrés alternés [Doostan et al., 2013]
- Expressions analytiques de la constante de normalisation, des moments et des marginales a posteriori

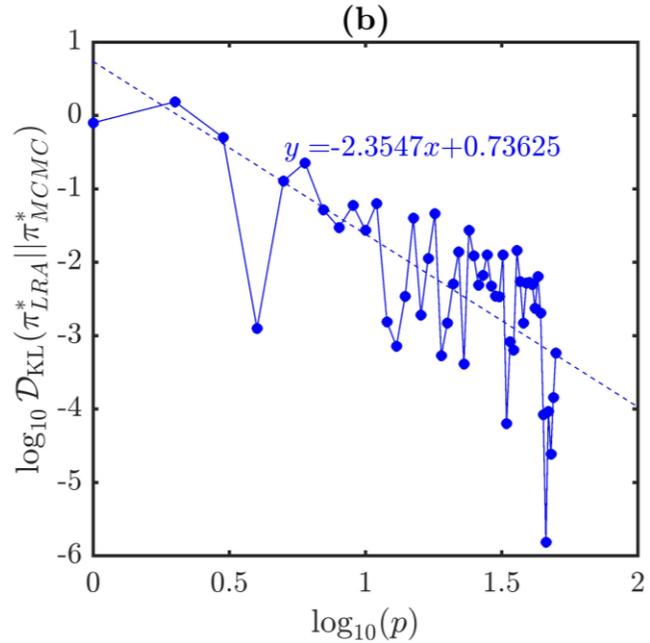
$$Z := \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; x) d\pi_X(x) = \sum_{l=1}^R b_l \left( \prod_{i=1}^d z_{0,l}^{(i)} \right) \quad [\text{D.R., 2020}]$$

# Utilisation d'approximations tensorielles de bas rang

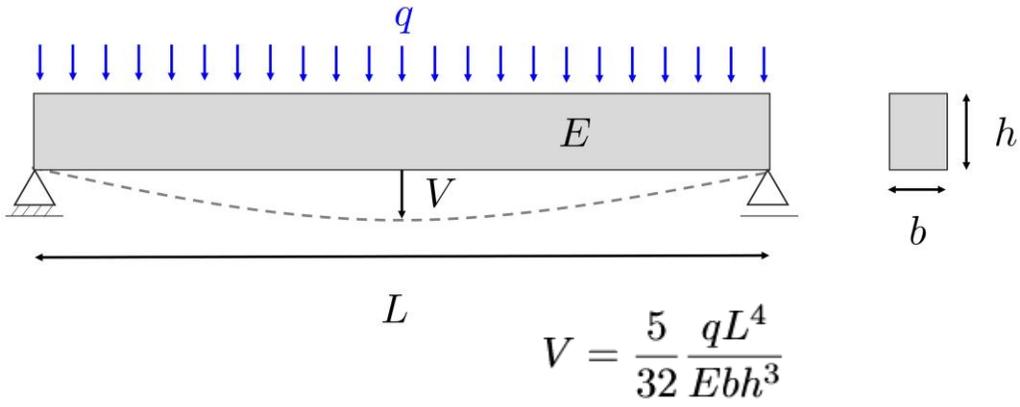
- Application à un cas simple : calibration du module d'Young d'une poutre uniformément chargée
- Comparaison des résultats avec ceux obtenus via MCMC-RWMH



Densités de référence et approchées



DKL



Expérience	1	2	3	4	5
$V$ (mm)	12.84	13.12	12.13	12.19	12.67

Paramètre	Unité	Valeur
$b$	m	0.15
$h$	m	0.3
$L$	m	5
$q$	$\text{kN.m}^{-1}$	0.012

# Approximation par des fonctions de base radiales

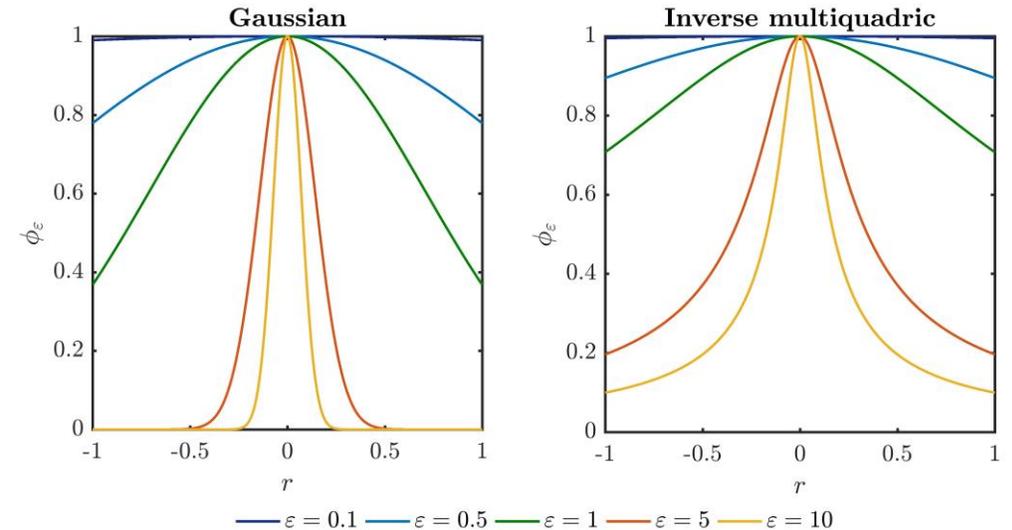
Formulation :

$$\mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; x) \approx \hat{\mathcal{L}}_N(\mathcal{Y}^{obs}; x) := \sum_{i=1}^N c_i \phi_\varepsilon(\|x - x_i\|)$$

Coefficients      Fonctions radiales      Centres

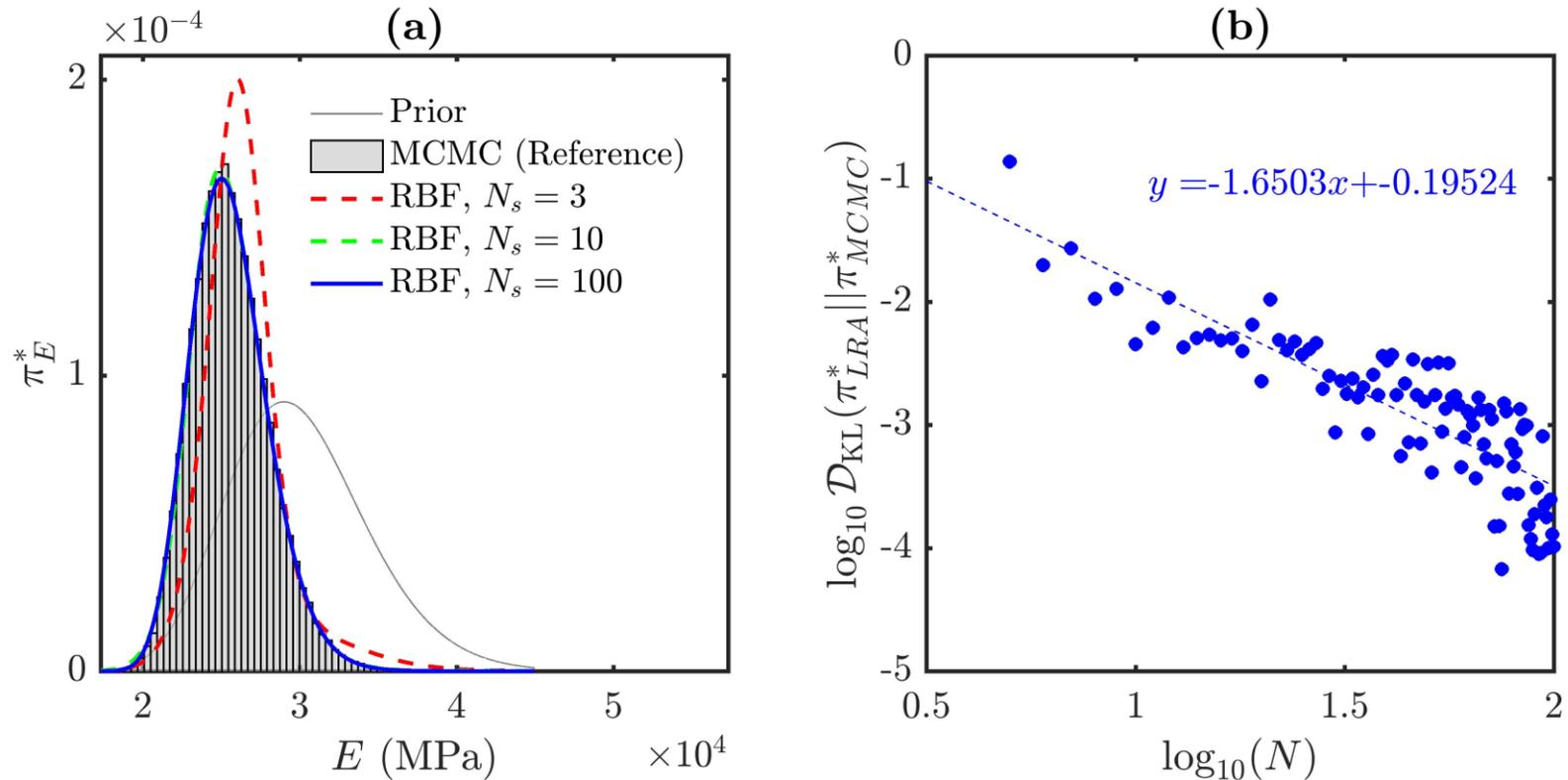
sous l'hypothèse de régularité  $\mathcal{L}(\mathcal{Y}^{obs}; \cdot) \in C^\omega(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$

- Coefficients calculés via la résolution d'un système linéaire
- Ajustement du paramètre de forme  $\varepsilon$  par optimisation
- Centres échantillonnés sur le support de la *prior*, ou par MAP



# Application : calibration du module d'Young d'une poutre uniformément chargée

## Résultats – Fonctions de base radiales



(a) Densités a priori et a posteriori (référence vs. RBF); (b) DKL référence-approximation